Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatika Kar
Média- és Oktatásinformatika Tanszék

A GeoGebra program használata a középiskolai matematika oktatásban

Készítette:

Horváthné Oroján Gabriella
levelező informatika-tanár szak

Témavezető:

Papp-Varga Zsuzsanna
tanársegéd

Budapest

2007. december

Tartalomjegyzék

Bevezető

Ez a munka az ELTE Informatika Karának informatika-tanár szakán készült, abból a célból, hogy segítséget nyújtson matematika és informatika tanároknak, diákoknak és mindenkinek aki érdeklődik e két tantárgy iránt.

A dolgozat témája tágabb értelemben az informatika alkalmazásának lehetőségeit mutatja be a matematika oktatásban. Szűkebb értelemben véve pedig egy matematikai segédprogram a GeoGebra ismertetése, melynek segítségével a középiskolai matematika oktatást tehetjük színesebbé, változatosabbá.

A szakdolgozat tartalmáról

A dolgozat 1. fejezetében szó lesz a matematikai segédprogramokról, azon belül a dinamikus programokról és ezek előnyeiről. Ebben a fejezetben összehasonlítom a GeoGebra programot a többi matematikai szoftverrel. A 2. fejezetben bemutatom a GeoGebra használatát. Ismertetem a program lehetőségeit, sorba veszem a menüpontokat, bemutatom az eszköztár ikonjait, és csoportosítom az alkalmazott parancsokat.

Az ismertető után pedig a program használatának lehetőségeit mutatom be, párhuzamba állítva a középiskolai matematika tananyaggal. A dolgozat elkészítésénél a feladatokat az általam is használt **Sokszínű matematika** tankönyvcsalád köteteiből veszem. De azok a példák, amiket itt feldolgozok, többnyire általános feladatok, nem kötődnek egyetlen tankönyvhöz sem, inkább a megtanulandó tananyaghoz. Így bárkinek segítséget nyújthat, aki a matematikával foglalkozik tankönyvtől függetlenül.

A 3-8. fejezetekben a középiskolai matematika tananyagon végighaladva, sorban be fogom mutatni, hol és hogyan tudjuk használni a programot a matematika oktatásban. Ezek a fejezetek a középiskolai matematika tananyag következő témaköreire épülnek: függvények, egyenletek, síkgeometria, geometriai transzformációk, trigonometria és koordinátageometria. Minden témakörön belül tanévenkénti csoportosításban találhatók meg az egyes anyagrészek, feladatok.

Ezekhez a fejezetekhez készítettem el a mellékleteket, melyeket összerendeztem egy weblapra. A weblapot a mellékletben található index.html állománnyal nyithatjuk meg. A weblap felépítése ugyanaz, mint a dolgozat 3-8. fejezetei, itt is témakörönként, azon belül pedig tanévenként találjuk meg a feladatokhoz tartozó dinamikus munkalapokat.

A mellékletben található mappák szintén a dolgozat fejezeteire épülnek. Ezekben a mappákban megtalálhatók az eredetileg elkészült ggb kiterjesztésű GeoGebra fájlok. Ezeknek a fájloknak az exportálásával készültek el a html fájlok és a hozzá kapcsolódó szintén ggb kiterjesztésű munkalapok.

A szakdolgozat 3-8. fejezetei konkrét feladatok megoldásán keresztül mutatja be a program használatát és működését, a mellékletek segítségével. Minden egyes példához, amihez munkalap is tartozik, ahhoz ábra és hivatkozás is található a dolgozatban, megkönnyítve a navigálást a melléklet és a dolgozat között.

Ha a szakdolgozattal párhuzamosan a mellékleteket is használjuk, akkor bizonyosodhatunk meg a GeoGebra sokoldalúságáról. Láthatóvá válik, hogyan tudjuk használni a programot a matematika tananyag legtöbb témakörénél, hogyan tudunk egyszerűbb és összetett feladatokat megoldani, új anyagrészeket szemléltetni, gyakorló feladatokat ellenőrizni. Bemutathatunk vele geometriai szerkesztéseket, bizonyításokat. Vizsgálhatjuk segítségével a megoldások számát, könnyen tudunk következtetéseket levonni, diszkussziót készíthetünk vele.

A dolgozat befejezése az elhangzottak rövid összegzését tartalmazza. Itt írom le saját tapasztalataimat a program használatáról, melyeket a gyakorlatban ki is próbáltam.

A témaválasztás szempontjai

A szakdolgozat témaválasztásában több szempont is motivált. Jelenleg középiskolában tanítok matematikát és informatikát. Vannak olyan osztályok, ahol mindkét tantárgyat én tanítom. Így lehetőségem van arra, hogy e két tantárgyat összekapcsoljam. Nemcsak az informatika órába szeretném bevinni a matematikát, hanem a matematika órán is használom a számítógépet.

Nyomos érv volt a dolgozat témájának kiválasztásánál, hogy a matematikával kapcsolatos legyen, és használni is tudjam a mindennapi munkában. Éppen ezért nagyon is kézenfekvő volt számomra a GeoGebra választása, ami kimondottan középiskolai segédletként íródott, így nyílván jól használható a középiskolai matematika oktatásban.

A másik fő ok a témaválasztásban, hogy gyakran tapasztalom, a mai diákoknak mennyire unalmas, egyhangú az olyan tanóra, ahol csak papír és ceruza áll a rendelkezésükre. Sokkal jobban fel lehet kelteni az érdeklődésüket, ha használjuk a

számítógépet, ami egyébként is közel áll a mai fiatalokhoz. Éppen ezért a projektoros szemléltetés nagy segítség az óra színesebbé tételére.
További előnye a program projektoros kivetítésének, ha a tanteremben nincsen megfelelő négyzetrácsos tábla. Ilyenkor a gép segítségével sokkal szebb és igényesebb szerkesztéseket, rajzokat lehet készíteni, melyeket a diákok is könnyebben átlátnak és megértenek.

A előbb felsorolt szempontok szerint, szükségesnek tartom, hogy a diákok és tanárok használják a számítógépet az informatika órán kívül is, megismerjék a benne rejlő lehetőségeket. Igaz, az iskolában az informatika egy önálló tantárgy, de nemcsak itt, hanem más tantárgyaknál is sokrétűen használhatjuk. Erre mutat példát ez a dolgozat is.

1. Matematikai segédprogramok

Az ilyen szoftverek matematikai számítások számítógépes elvégzésére alkalmasak. Itt a "számítások" szó alatt azonban nem csak pusztán "számolásra" kell gondolnunk. Ezek a rendszerek komplex és összetett feladatok megoldására alkalmasak. Segítségükkel olyan problémák oldhatók meg könnyűszerrel, ami kézzel akár hónapokig is eltarthat, vagy éppen lehetetlen volna.

Sikerrel használják ezeket a programokat, mind a kutatómunkában, mind az oktatásban is. A legtöbb ilyen program nem lezárt, hanem folyamatosan fejlődő, változó rendszer, emberek tucatjai foglalkoznak a fejlesztésükkel. Ma már a legtöbb ismertebb matematikai segédprogramnak megjelent a magyar nyelvű változata is.

A matematikai programokat csoportosíthatjuk aszerint, hogy milyen problémák megoldására tervezték. Így beszélhetünk speciális, és általános célú rendszerekről. A **speciális rendszerek** csak bizonyos feladatok megoldására alkalmas, viszont hatékonyabbak, így inkább a kutatás területén használják őket.

Számunkra az **általános célú szoftverek** az érdekesek, amelyek viszonylag nagyobb területet ölelnek fel, több probléma megoldható segítségükkel. Ezek a programok azok, amiket jól használhatunk az oktatásban is. Ilyen matematikai segédprogramok pl.: Mathematica, Derive, Maple, Cabri, Euklides és ide tartozik a GeoGebra is.

A felsorolt programok közül bármelyiket használhatnánk a középiskolai oktatásban, mindegyik mellett lehet felsorakoztatni érveket. Viszont mindenféleképpen érdekesebbek ezek közül a **dinamikus rendszerek**.

A dinamikus geometriai szoftverek segítségével geometriai szerkesztéseket végezhetünk el ugyanolyan módon és elven, mintha azt hagyományosan végeznénk. A géppel elkészített szerkesztések **bázispontok**ra épülnek és az elkészített szerkesztések a bázispontok mozgatásával megváltoztathatók, a változások nyomon követhetők. A dinamikus geometriai rendszereket a nevükből következően DGS-nek is nevezik és ezeknek a programoknak a következő közös jellemzőit lehet felsorakoztatni:

- **Interaktivitás** azt jelenti, hogy a szerkesztés bázispontjai megfoghatók és szabadon áthelyezhetők a síkon és a szerkesztett ábra úgy változik, hogy az objektumok közötti kapcsolat megmarad. Az interaktivitás óriási előny akkor, ha megfigyeléseket, következtetéseket szeretnénk levonni egy-egy szerkesztésből. Segít a megoldások számának vizsgálatában, a diszkusszió meghatározásában.

- **Animáció** lényege abból áll, hogy a bázispontunk végigfut egy előre meghatározott objektumon és minden egyes fázisban megjelenik az aktuális szerkesztésnek megfelelő ábra. Jelentősége a látványosságából következik, vagyis igen jó motivációs tényező az oktatásban.
- **Nyomvonal megjelenítés** a mértani hely meghatározásán alapuló feladatoknál látható. Ilyenkor a bázispont végigfut egy alakzaton és a tőle függő másik pont által megjelenített vonalat nevezzük nyomvonalnak.
- **Szerkesztés visszajátszása,** vagy lejátszása annyit jelent, hogy a már elkészített szerkesztést akárhányszor visszanézhetjük és elemezhetjük. Lényeges lehet az új ismeretek megértésénél, az összefüggések keresésénél.

A dinamikus programok közé tartozik a GeoGebra program is. Amely -mint látni fogjuk- a sokoldalúsága mellett, könnyű kezelhetőségével és grafikájának jó minőségével is kiemelkedik a többi program közül.

A szoftver nagy előnyei közé tartozik, hogy létezik magyar nyelvű változata. További óriási előnye, hogy mindenki számára ingyenesen elérhető a www.geogebra.org oldalon. A programot a használathoz, még csak telepíteni sem kell. A program használata platform független, Windows operációs rendszer alatt is működik. A program működéséhez Java plugin-re van szükség, ami szintén ingyenesen letölthető.

Így látható, hogy GeoGebra programhoz bárki hozzáférhet és bármelyik oktatási intézményben szabadon lehet használni. Most már a GeoGebra **3.0** verziója is letölthető, de a dolgozat elkészítésekor én a GeoGebra **2.7.1** verzióját használtam. A továbbiakban erről a matematikai segédprogramról lesz szó részletesen. Először ismerkedjünk meg magával a program felépítésével, szintaktikájával.

2. Programismertető

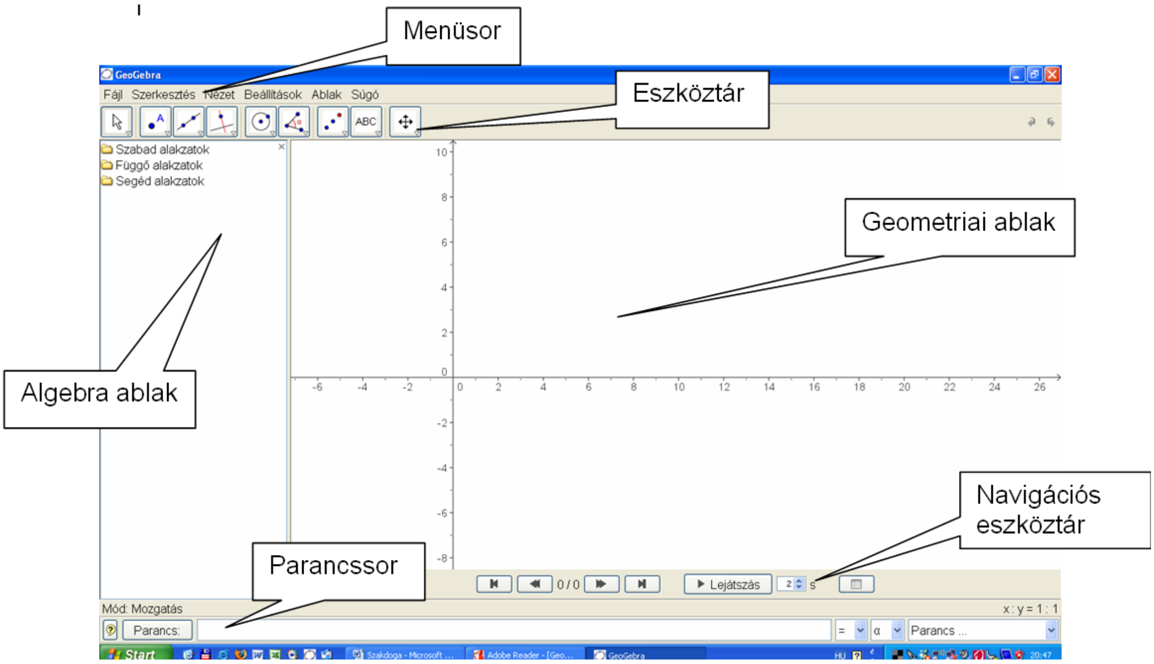
A GeoGebra az előbb tárgyaltak szerint általános célú matematikai programnak tekinthető, mely három témakört is felölel. Témájában kapcsolódik a geometriához, algebrához és a számítási feladatokhoz. Az elnevezés is erre utal: geo geometriát, gebra pedig algebrát jelent. Középiskolai oktatási segédletként írta Markus Hohenwarter a Salzburg Egyetemen.

A GeoGebra egyrészt egy dinamikus geometriai szoftver. Megadhatók benne pontok, vektorok, szakaszok, egyenesek, kúpszeletek és még sok minden más, amik a későbbi szerkesztés során dinamikusan megváltoztathatók. Másrészt közvetlenül megadhatók egyenletek és koordináták is. Így lehetőséget biztosít számok, vektorok és pontok változóként való kezelésére; függvények deriváltjának és integráltjának meghatározására, szélsőérték feladatok megoldására.

Ez a két tulajdonság határozza meg a GeoGebra jellegzetességét: egy kifejezés az algebra ablakban megfelel egy objektumnak a geometria ablakban, és viszont. Éppen ezért megtehetjük, hogy magát az objektumot vesszük fel a geometria ablakban és ekkor megkapjuk az alakzathoz tartozó kifejezés egyenletét, vagy fordítva.

2.1. Általános jellemzők

A GeoGebra program elindítása után az **1. ábrán** látható felület jelenik meg,



1. ábra

A program induló ablakának részei:

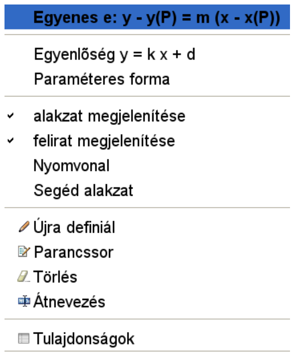
- **Menüsor** a program által elérhető funkciókat tartalmazza. A részletes leírást a 2.2. pontban tárgyalom.
- **Eszköztár** az adatok, objektumok geometriai úton való bevitelére szolgál. Az eszköztár ikonjait kattintással tudjuk kiválasztani a megfelelő csoport legördülő listából, melyet az ikonok sarkán található kis háromszög jelez. Az aktuálisan kiválasztott ikon keretezetten jelenik meg. Valamint a parancssor feletti állapotsor jelzi az aktuális módot. A módok részletes ismertetésére a 2.3. pontban kerül sor.
- **Algebrai ablak** a program objektumainak értékét, vagy képletét tartalmazza. Megkülönböztetünk szabad alakzatokat, függő alakzatokat és segéd alakzatokat. A **Szabad alakzatok**at mi vesszük fel és ezeket a síkon szabadon mozgathatjuk, míg a **Függő alakzatok**at nem tudjuk mozgatni, hanem a szabad alakzatok függvényében változnak. A **Segéd alakzatok** közé mi helyezhetünk tetszőlegesen különböző alakzatokat.
- **Geometriai ablak, vagy Rajzlap** az alakzatok megjelenítésére szolgál. A rajzlap beállításait a **Beállítások menü / Rajzlap** almenünél tudjuk megváltoztatni.
- **Navigációs eszköztár** segítségével a már elkészült szerkesztés lépésein tudunk oda-vissza lépegetni. A **Lejátszás** gombra kattintva pedig a teljes szerkesztés menetét tudjuk visszajátszani a megadott sebességgel. A lejátszás gomb mellett található ikon pedig a **Szerkesztő protokoll**, ami a szerkesztés lépéseit mutatja sorrendben, feltüntetve az adott alakzatok definícióját is.
- **Parancssor** pedig az adatok, objektumok közvetlen, algebrai bevitelére szolgál. A parancsok szintaktikáját is bemutatom, párhuzamba állítva a megfelelő eszköztáron található ikonokkal.

Láthatjuk, hogy objektumokat a rajzlapon közvetlenül, parancsok segítségével is felvehetünk, vagy az eszköztár ikonjainak segítségével is megjeleníthetünk. Mindkét esetben megkapjuk magát az alakzatot a rajzlapon és az alakzat képletét az algebra ablakban.

Ha az alakzat képletére kattintunk jobb egérgombbal az algebra ablakban, vagy magára az alakzatra a geometriai ablakban, akkor megjelenik az adott objektumhoz tartozó **2. ábrán** látható **Környezeti menü**, ami alakzatonként kissé módosul.

A menü segítségével tudjuk az alakzatot újra definiálni, meg tudjuk határozni az alakzat és a felirat láthatóságát.

A **Tulajdonságok** menüpont alatt pedig az alakzat formátumait tudjuk módosítani: alakzat színe, vonalstílus, vonalvastagság. Itt tudjuk beállítani, hogy a felirat mellett az érték is látható legyen. Itt módosítható, hogy az alakzat fix legyen-e.



2. ábra

2.2. Menüpontok

2.2.1. Fájl menü

Szokásos menüpontokon - **Új, Megnyitás, Mentés, Bezárás** - kívül, érdemes kiemelni a következő két menüpontot:

- **Nyomtatási kép,** melynél a Rajzlap és a Szerkesztő Protokoll is megnézhető nyomtatási formában. Mindkét esetben megadható a szerkesztés címe, szerzője és dátuma, valamit a nyomtatási kép legfontosabb jellemzői.
- **Export,** mely következő almenüpontokat tartalmazza:
  - ✓ **Dinamikus munkalap, mint Weblap (html)** esetén, az export ablakban megadható a szerkesztés címe, a szerző és a dátum. Írható a szerkesztéshez magyarázó szöveg a szerkesztés elé és után. Ide kerül beágyazásra maga a szerkesztés, melynek a mérete pixelben megadható. Exportáláskor három fájl keletkezik egyszerre, melyeknek egy könyvtárban kell lennie, hogy a dinamikus munkalap működjön. Az így elkészült exportált fájl bármilyen böngészővel megnézhető (Java környezet itt is szükséges) és számos szövegszerkesztővel szerkeszthető. Az elkészült három fájl:
    - html fájl, ez tartalmazza a munkalapot,
    - ggb fájl, ami a szerkesztést tartalmazza,
    - geogebra.jar, ami lehetővé teszi, hogy a szerkesztés interaktív legyen.
  - ✓ **Szerkesztő protokoll, mint Weblap (html),** ahol a szerkesztő protokoll a szerkesztés lépéseit tartalmazza időrendi sorrendben, táblázatba rendezve. Ilyenkor az export ablakban megadható a szerkesztés címe, szerzője és a szerkesztési dátum. Természetesen a munkalap mérete is megadható, valamint, hogy a szerkesztő protokoll mellett a szerkesz-

tés képe is látható-e. Az így elkészült weblap böngészővel megnézhető.

- ✓ **Rajzlap, mint kép (png, eps)** exportálás esetén választhatunk, hogy a képet png formátumban pixel grafikus képként mentsük el, vagy eps formátumban vektorgrafikus képként. A png formátumú kép felbontása szabályozható 72-600 dpi között, míg az eps formátumú kép felbontása fixen 72 dpi.
- ✓ **Rajzlap vágólapra másolása** esetén, egy png formátumú, képernyő nagyságú képet másolunk a vágólapra. Előnye, hogy mentés nélkül tudjuk a vágólapon lévő képet más dokumentumokba beszúrni.

2.2.2. Szerkesztés

A **Visszavonás** és **Újra** pontokon kívül, a **Tulajdonság** menüpont található itt. Ha az utóbbi menüpontot választjuk, akkor a megjelenő ablakban az aktuális dokumentum alakzatai láthatók. A kiválasztott objektum tulajdonságai pedig megváltoztathatók.

2.2.3. Nézet

A menü pontjainak segítségével meg tudjuk határozni, hogy mit látunk az ablakban. Megadható, hogy a rajzlapon láthatók-e a **Tengelyek** és a **Rács**.
Bezárható az **Algebra ablak**, vagy **Vízszintes vágás**sal a rajzlap alá helyezhető. Ha nem szeretnénk láttatni a **Segéd alakzatok**at, akkor ezek eltüntethetők.
Továbbá szabályozható a **Parancssor,** a **Parancslista,** a **Navigációs eszköztár,** a **Lejátszás gomb** és a **Szerkesztő Protokoll** láthatósága.

2.2.4. Beállítások

Az aktuális szerkesztésre vonatkozó globális tulajdonságok itt módosíthatók.
A következő tulajdonságok változtathatók meg:

- ➢ **Pont elfogás,** melynél megadhatjuk, hogy a pont elfogás **rács**on történjen, így könnyebben tudunk egész rácspontú pontokat kijelölni a rajzlapon.
- ➢ **Szög egysége,** ahol a szög mértékegységét adhatjuk meg. Két lehetőség: **Fok, Radián**.
- ➢ **Tizedes hely** beállításánál 0-5 tizedes jegy pontossággal számolhatunk.

- **Pont stílus,** ahol a választható lehetőségek: ●,○,×.
- **Koordináták** menüpontnál tudjuk megadni, hogy a pontok koordinátái milyen alakban jelenjenek meg: **A(x|y)** vagy **A=(x,y)**.
- **Grafika,** ahol a rajz minőségét szabályozhatjuk.
- **Betűméret,** melyet pontban kell érteni és megadni.
- **Nyelv,** melynél a teljes program nyelvezete megváltozik, beleértve a parancsokat is.
- **Rajzlap,** ahol a háttér színét, a tengely és a rács beállításait szabályozhatjuk.

2.2.5. Ablak

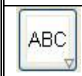
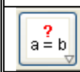
Ez a menüpont megjelenít egy új ablakot, mely segítségével párhuzamosan tudunk több szerkesztést készíteni.

2.2.6. Súgó

A **Licensz** és a **Névjegy** mellett a **Súgó** a GeoGebra kézikönyv magyar nyelvű fordítását tartalmazza.

2.3. Eszköztár ikonjai, módok

Az alábbi táblázat az eszköztáron található ikonok, módok jelentését és kezelését tartalmazza csoportosítva. Ha az alakzatokat az ikonok segítségével vesszük fel a geometria ablakban, akkor a program automatikusan elnevezi őket.

Általános módok		
	Mozgatás	szabad alakzatok mozgathatók
	Pont körüli forgatás	először a forgatás középpontját kell kijelölni, és a szabad alakzatok forgathatók
	Szöveg beszúrása	az ikon kijelölése után a rajzlapon kattintva megjelenik egy párbeszédablak, amibe a szöveget írjuk
	Kép beszúrása	rajzlapon kell kijelölni a kép bal alsó sarkát, és ezután jelenik meg a párbeszédablak
	Kapcsolat alakzatok között	ki kell jelölni a két alakzatot
	Rajzlap mozgatása	a koordinátarendszert mozgatjuk

	Nagyítás, kicsinyítés	rajzlapon kattintva
	Alakzat mutatása/ elrejtése	algebra ablakban a körlap színe jelzi, hogy az alakzat látható-e vagy sem - kék: igen, fehér: nem-
	Felirat mutatása/ elrejtése	
	Vizuális stílus másolása	
	Alakzatok törlése	
Pontok		
	Új pont	
	Két alakzat metszéspontja	két alakzat metszetén kattintunk, de így egyszerre csak egy metszéspont hozható létre
	Felezőpont, középpont	kijelöljük a két pontot
Egyenes, szakasz, sokszög		
	Egyenes két ponton át	
	Szakasz	
	Szakasz pontból adott távolsággal	pont kijelölése után a párbeszédablakban adjuk meg a szakasz hosszát
	Félegyenes	először a félegyenes kezdőpontját jelöljük ki
	Vektor	kezdőpont először, majd a végpont
	Vektor pontból	először a pontot, majd a vektort kell kijelölni
	Sokszög	
Ponthalmazok		
	Merőleges	kijelölés sorrendje: először a pont, majd az egyenes
	Párhuzamos	
	Szakasz felező	szakasz végpontjait jelöljük ki
	Szögfelező	három pontot kell kijelölni
	Érintők	először a pontra, majd a kúpszeletre kell kattintani
	Poláris	
Kör, körív, körcikk		
	Kör középponttal és kerületi ponttal	először a középpont, majd a kerületi pontot adjuk meg

	Kör középponttal és sugárral	középpont után, a párbeszédablakba kell beírnunk a kör sugarát
	Köré írt kör	kijelölendő a három pont
	Két pontra illeszkedő félkör	
	Körív középponttal, és két pontjával	
	Három pontra illeszkedő körív	
	Körcikk középponttal és két pontjával	
	Három pontra illeszkedő körcikk	
	Kúpszelet öt ponton át	
Szög, távolság, mértani hely		
	Szög	három pont kijelölése, pozitív körüljárási irány
	Szög adott mérettel	két pont kijelölése után a párbeszédablakban megadhatjuk a szög nagyságát és körüljárási irányát
	Távolság	kijelölendő a két alakzat
	Csúszka	ikon kiválasztása után a rajzlapon kattintva megjelenik egy párbeszédablak, melyben megadhatók a csúszka tulajdonságai
	Mértani hely	
Geometriai transzformációk		
	Centrális tükrözés	először a tükrözendő alakzatot, majd a középpontot kell kijelölni
	Tengelyes tükrözés	először a tükrözni kívánt alakzatot, majd a tengelyt jelöljük ki
	Pont körüli forgatás adott szöggel	kijelölendő a forgatni kívánt alakzat, majd a centrum és utána a forgatás szöge és iránya
	Eltolás vektorral	először az alakzatot, majd az eltolás vektort kell kijelölni
	Centrális nyújtás	alakzat, majd középpont kijelölése után adjuk meg a nyújtás előjeles nagyságát

2.4. Közvetlen adatbevitel

A GeoGebra mint az előbbiekben láttuk, számokat, pontokat, szakaszokat, egyeneseket, vektorokat, szögeket és különböző kúpszeleteket tud kezelni.

Most megnézzük, hogyan tudjuk ezeket az alakzatokat a koordinátáik, illetve az egyenleteik segítségével létrehozni. Ilyenkor a parancssorba gépeljük be az alakzat adatait.

Közvetlen adatbevitel esetén lehetőségünk van az alakzatoknak nevet adni. Pl.: **P=(3,5)**. Az alakzatok nevében használhatók indexek. Pl.: **P_1** a következőképpen adható meg: **P_1**.

Mind a számok, a koordináták és az alakzatok egyenletének bevitelénél használhatjuk a szokásos aritmetikai műveleteket: **+, - , * , / , ^, !** és a zárójelet **( )** is.

2.4.1. Számok és szögek

A számok megadásakor a „**.**" jelenti a tizedesvesszőt. A megadott számot, csak annyi tizedes jeggyel veszi figyelembe a program, amennyi a **Beállítások** menüben meg van határozva.

Szám megadása pl.: **i=3.25**.

A szögek megadhatók fokban és radiánban is. Továbbá a szögeknél meghatározható, hogy a reflex szöget engedélyezzük-e. Amennyiben nem engedélyezzük a reflex szöget, úgy a program a két félegyenes által bezárt szögek közül automatikusan a kisebbet adja, vagyis a szög nagysága kisebb 180°. Míg a reflex szög esetén 180°-nál is nagyobb szöget is kaphatunk eredményként.

Szög megadása pl.: **α=45°**, vagy **β=pi/4**.

A szabad számok és szögek értékét meg tudjuk változtatni, ha hozzájuk csúszkát rendelünk. Itt megadható a számhoz, vagy szöghöz rendelhető intervallum. De szabad számok és szögek esetén az alakzat **Környezeti menü**jének **Tulajdonságok** pontjánál is be tudjuk határolni az intervallumot [min, max].

2.4.2. Pontok

A pontok és vektorok megadhatók a szokásos Descartes-féle koordinátákkal, de megadhatók polár koordinátákkal is. A pontokat a szokásos módon nagy betűkkel jelöljük.

Pont megadása:

- Descartes-féle koordinátákkal**: P=(0,1),**
- Polár koordinátákkal: **P=(1,90°)**.

2.4.3. Egyenesek

Az egyenes megadható lineáris egyenletével, vagy paraméteres formában. A lineáris egyenletben **x** és **y** változó használható. A paraméteres alakban pedig **X** és **t** változó és előre megadott pont és vektor használható.
Az egyeneseket kis betűvel jelöljük, és **:** választjuk el.
Egyenesek megadása:

- lineáris egyenlettel **e: 2*x-3*y=5,**
- paraméteres alakban **f: X=(2,-1)+t*(3,2)**.

A két koordinátatengely a nevükkel megadható: **xTengely**, **yTengely**.

2.4.4. Kúpszeletek

A kúpszeletek másodfokú egyenleteikkel adhatok meg, explicit és implicit formában. A kúpszelet nevét „**:**” kell elválasztani az egyenlete előtt.
Példák:

- kör egyenlet**: k1:** $(x-2)^2+(y-1)^2=16$ vagy **k2:** $x^2+y^2-4*x-2*y=11$,
- parabola egyenlete: **p:** $(x-3)^2+2=y^2$ **,**
- ellipszis egyenlete: **e:** $9*x^2+16*y^2=144$**,**
- hiperbola egyenlete: **h:** $9*x^2-16*y^2=144$**.**

2.4.5. Függvények

A függvények beviteléhez használhatjuk a GeoGebra belső függvényeit, vagy már a korábban definiált számokat, változókat, függvényeket. A függvények nevét **f(x), g(x)** jelölhetjük és nevük után egyenlőségjelet kell írnunk.

A beépített függvények:

- **x( ):** x koordináta
- **y( ):** y koordináta
- **abs( ):** abszolút érték
- **sgn( ):** előjel
- **round( ):** kerekítés
- **floor( ):** számnál nem nagyobb legnagyobb egész
- **ceil():** számnál nem kisebb

- **sqrt( ):** négyzetgyök
- **exp( ):** exponenciális
- **log( ):** logaritmus (e alapú)
- **sin( ):** szinusz
- **cos( ):** koszinusz
- **tan( ):** tangens
- **asin( ):** arc szinusz
- **acos( ):** arc koszinusz
- **atan( ):** arc tangens
- **sinh( ):** szinusz hip.
- **cosh( ):** koszinusz hip.
- **tanh( ):** tangens hip.
- **asinh( ):** szinusz antihip.
- **acosh( ):** koszinusz antihip.
- **atanh( ):** tangens antihip.

További példák összetett függvények létrehozására:

- **f(x)=2*log(x-1),**
- **g(x)= sin(f(x)),**
- **h(x)=g'(x),** ahol **g'** a derivált függvényt jelenti.

Az így létrehozott függvények természetesen újra definiálhatók és a szabad függvények mozgathatók az egérrel.
Viszont közvetlen adatbevitel esetén nincs lehetőségünk a függvényeknek egy adott [a, b] intervallumon történő ábrázolására. Ezt a problémát, mint látni fogjuk a következő fejezetben parancs segítségével tudjuk megoldani.

2.5. Parancsok

A parancsok segítségével létre tudunk hozni új alakzatokat, illetve a már meglévőket módosíthatjuk. Az alakzatoknak itt is tudunk nevet adni a szokásos módon.
Pl.: **M= Metszéspont[e,f]**
Nézzük meg a parancsokat, csoportosítva:

2.5.1. Általános parancsok

- **Kapcsolat[a alakzat, b alakzat]**: egy üzenet ablakban megmutatja a két alakzat kapcsolatát
- **Törlés[alakzat]**: töröl egy alakzatot, minden leszármazottjával

2.5.2. Pontokkal kapcsolatos parancsok

- **Pont[alakzat]:** pont az alakzaton, ahol az alakzat lehet egyenes, félegyenes, szakasz, vektor, kúpszelet és függvény
- **Pont[A pont, v vektor]**: **A** ponthoz képest a **v** vektorral eltolt pontot kapunk
- **Metszéspont[a alakzat, b alakzat]:** a két alakzat összes metszéspontját megadja, ahol az alakzat lehet egyenes, kúpszelet, függvény és polinom.
- **Metszéspont[a alakzat, b alakzat, n szám]:** a két alakzat **n**. metszéspontját adja
- **Középpont[A pont, B pont]**: **A** és **B** pontok felezőpontja
- **Középpont[szakasz]**: a szakasz felezőpontját adja
- **Súlypont[sokszög]**: a sokszög súlypontját adja

2.5.3. Egyenesek, szakaszok, sokszögek

- **Egyenes[A pont, B pont]**: két pontra illeszkedő egyenes
- **Egyenes[A pont, e egyenes]**: **A** pontra illeszkedő **e**-vel párhuzamos egyenes
- **Egyenes[A pont, v vektor]**: **A** pontra illeszkedő **v** irányvektorú egyenes
- **Félegyenes[A pont, B pont]**: **A** kezdőpontú **B**-re illeszkedő félegyenes
- **Félegyenes[A pont, v vektor]**: **A** kezdőpontú **v** irányvektorú félegyenes
- **Szakasz[A pont, B pont]**: két pont által határolt szakasz
- **Szakasz[A pont, a szám]**: **A** kezdőpontú **a** hosszúságú szakasz
- **Sokszög[A pont, B pont, C pont …]**: pontok által határolt sokszög
- **Terület[sokszög]**: a sokszög területe

2.5.4. Vektorokkal kapcsolatos parancsok

- **Vektor[A pont B pont]**: A kezdőpontú vektor
- **Vektor[pont]**: a pont helyvektora
- **Irány[egyenes]**: az egyenes egy irányvektorát adja
- **Egységvektor[egyenes]**: az egyenes egységnyi hosszú irányvektorát adja
- **Egységvektor[vektor]**: vektor egységvektora
- **Normálvektor[egyenes]**: az egyenes egy normálvektorát adja
- **Normálvektor[vektor]**: vektorra merőleges vektort ad

- **Egységnyinormálvektor[egyenes]**: egyenes egységnyi hosszúságú normálvektora
- **Egységnyinormálvektor[v vektor]**: a **v** vektorra merőleges egységvektor
- **Meredekség[egyenes]**: egyenes meredekségét adja, és kirajzol egy meredekségi háromszöget

2.5.5. Ponthalmazok

- **Merőleges[A pont, e egyenes]**: **A** pontra illeszkedő **e**-re merőleges egyenes
- **Merőleges[A pont, n vektor]**: **A** pontra illeszkedő **n** normálvektorú egyenes
- **Szakaszfelező[A pont, B pont]**: az AB szakasz felezőmerőlegese
- **Szakaszfelező[s szakasz]**: **s** szakasz felezőmerőlegese
- **Szögfelező[A pont, B pont, C pont]**: **ABC** szög szögfelezője
- **Szögfelező[e egyenes, f egyenes]**: két egyenes mindkét szögfelezője
- **Érintő[A pont, f függvény]**: függvény érintője **x=x(A)** pontban
- **Érintő[A pont, c kúpszelet]**: egy kúpszelet **A** pontból húzható érintői
- **Érintő[e egyenes, c kúpszelet]**: egy kúpszelet **e** egyenessel párhuzamos érintői
- **Poláris[A pont, c kúpszelet]**: **A** pontnak a kúpszeletre vonatkozó polárisa

2.5.6. Kör, körív, körcikk

- **Kör[O pont, r szám]**: **O** középpontú **r** sugarú kör
- **Kör[O pont, s szakasz]**: **O** középpontú **s** sugarú kör
- **Kör[O pont, A pont]**: **O** középpontú **A** kerületi pontú kör
- **Kör[A pont, B pont, C pont]**: három pontra illeszkedő kör
- **Sugár[kör]**: egy kör sugara
- **Félkör[A pont, B pont]: a két pontra rajzolt félkör**
- **Körív[O pont, A pont, B pont]**: **O** középpontú **A, B** pontok közötti körív
- **Körív2[A pont, B pont, C pont]**: három pontra illeszkedő körív
- **Körcikk[O pont, A pont, B pont]**: **O** középpontú körcikk
- **Körcikk2[A pont, B pont, C pont]**: három pont által határolt körcikk

2.5.7. Kúpszeletekkel kapcsolatos parancsok

Általános parancsok:

- **Kúpszelet[A pont, B pont, C pont, D pont, E pont]**: öt pontra illeszkedő kúpszelet
- **Közép[kúpszelet]**: egy kúpszelet középpontja (kör, ellipszis, hiperbola)
- **Fókusz[kúpszelet]**: egy kúpszelet fókuszait adja
- **Csúcspont[kúpszelet]**: egy kúpszelet összes csúcspontja (kúpszelet és a tengelyek metszéspontja
- **Excentricitás[kúpszelet]**: egy kúpszelet excentricitását adja
- **Tengelyek[kúpszelet]**: egy kúpszelet mindkét tengelye
- **Nagytengely[kúpszelet]**: egy kúpszelet nagytengelye
- **Kistengely[kúpszelet]**: egy kúpszelet kistengelye
- **Átmérő[e egyenes, c kúpszelet]**: kúpszelet e egyenessel párhuzamos átmérője
- **Átmérő[v vektor, c kúpszelet]**: a kúpszelet **v** irányvektorú átmérője

Parabola

- **Parabola[F pont, v egyenes]**: F fókuszpontú, v vezéregyenesű parabola
- **Paraméter[parabola]**: parabola paramétere
- **Vezéregyenes[parabola]**: parabola vezéregyenese

Ellipszis

- **Ellipszis[F pont, G pont, a szám]**: két fókuszával és nagytengelyének hosszával adott ellipszis
- **Ellipszis[F pont, G pont, s szakasz]**: két fókuszával és nagytengelyének hosszával adott ellipszis

Hiperbola

- **Aszimptota[hiperbola]**: a hiperbola mindkét aszimptotája
- **Hiperbola[F pont, G pont, a szám]**: két fókuszával és valós tengelyének hosszával (a) adott hiperbola
- **Hiperbola[F pont, G pont, s szakasz]**: két fókuszával és valós tengelyének hosszával (s) adott hiperbola

2.5.8. Szög

- **Szög[A pont, B pont, C pont]**: három pont által határolt szög
- **Szög[e egyenes, f egyenes]**: két egyenes által bezárt szög

- **Szög[u vektor, v vektor]**: két vektor által bezárt szög
- **Szög[vektor]**: vektor és az **x** tengely által bezárt szög
- **Szög[pont]**: pont helyvektora és az **x** tengely közötti szög
- **Szög[szám]**: szög átalakítása radiánná
- **Szög[sokszög]**: sokszög összes belső szögének nagysága

2.5.9. Hosszúság, távolság

- **Hossz[vektor]**: vektor hossza
- **Hossz[pont]**: ponthoz tartozó helyvektor hossza
- **Távolság[A pont, B pont]**: két pont távolsága
- **Távolság[A pont, e egyenes]**: pont és egyenes távolsága
- **Távolság[e egyenes, f egyenes]**: két egyenes távolsága, metsző egyenesek távolsága értelemszerűen 0.

2.5.10. Mértani hely

- **Mértani hely[P pont, Q pont]**: ábrázolja Q pont, P ponttól függő helyét, míg P pont végighalad egy alakzaton

2.5.11. Függvények, polinomok

- **Függvény[f függvény, a szám, b szám]**: [a, b] intervallumon ábrázolja f függvényt
- **Polinom[f függvény]**: ábrázol egy polinom függvényt
- **Derivált[f függvény]**: f függvény derivált függvénye
- **Derivált[f függvény, n szám]**: f függvény n. deriváltja
- **Integrál[f függvény]**: f függvény határozatlan integrálja
- **Alsóösszeg [f függvény, a szám, b szám, n szám]**: f függvény [a, b] intervallumon vett alsóösszege n beosztással
- **Felsőösszeg[f függvény, a szám, b szám, n szám]**: f függvény [a, b] intervallumon vett felsőösszege n beosztással
- **Integrál[f függvény, a szám, b szám]**: f függvény [a, b] intervallumon vett
- **Gyök[f függvény, a szám, b szám]**: f függvény egy gyöke az [a, b] intervallumon
- **Gyök[polinom]**: polinom összes gyöke

- **Szélsőérték[polinom]**: polinom összes helyi szélsőértéke
- **Inflexióspont[polinom]**: polinom összes inflexiós pontja

2.5.12. Geometriai transzformációk

- **Tükrözés[alakzat, O pont]**: egy alakzat minden pontját **O** pontra tükrözi centrálisan, az alakzat lehet pont, egyenes, szakasz, sokszög, kúpszelet vagy kép
- **Tükrözés[alakzat, t egyenes]**: egy alakzat minden pontját **t** tengelyre tükrözi tengelyesen, az alakzat lehet pont, egyenes, szakasz, sokszög, kúpszelet vagy kép
- **Eltolás[alakzat, v vektor]**: egy alakzat minden pontját **v** vektorral eltolja, az alakzat lehet pont, egyenes, szakasz, sokszög, kúpszelet, függvény vagy kép
- **Forgatás[alakzat, φ szög]**: egy alakzat minden pontját az origó mint középpont körül **φ** szöggel elforgatja, az alakzat lehet pont, egyenes, szakasz, sokszög, kúpszelet, függvény vagy kép
- **Forgatás[alakzat, φ szög, O pont]**: egy alakzat minden pontját az **O** pont körül **φ** szöggel elforgatja, az alakzat lehet pont, egyenes, szakasz, sokszög, kúpszelet, függvény vagy kép
- **Nyújtás[alakzat, O pont, k szám]**: egy alakzat **O** középpontú **k** arányú centrális nyújtása, ahol az alakzat lehet pont, egyenes, szakasz, sokszög, kúpszelet vagy kép.

Mint a fejezet elején említettem, a GeoGebra középiskolai segédletként készült. Éppen ezért célszerű megnézni, hogyan használható a program a középiskolai matematika tanításban és tanulásban. A következő fejezetekben a középiskolai matematika tananyagon végighaladva, sorban be fogom mutatni, hol és hogyan tudjuk használni a programot a matematika oktatásban.

3. Függvények a GeoGebra-ban

Függvények ábrázolásához célszerű, ha a program indítása után a **Nézet** menüben beállítjuk, hogy a **Tengelyek** és a **Rács** is látható legyen. Ha szükséges, akkor a **Beállítások** menüben a **Rajzlap** pontnál a tengelyek és a rácsozás tulajdonságait is megváltoztathatjuk. Itt tudjuk az egyenesek stílusát, a beosztás nagyságát, a tengelyek arányát és az egységet is megváltoztatni. Például az egység beállításra, mint látni is fogjuk, a trigonometrikus függvényeknél is szükség lesz.

Függvényekkel 9., 10. és 11.-es tananyagban találkozhatunk. Ebben a fejezetben évenként csoportosítva sorba veszem a középiskolában használt függvényeket és megnézem, mikor és miért érdemes használnunk a programot.
Ebben a fejezetben szóba kerülő munkalapokat a melléklet **Függvények** fejezete tartalmazza. A melléklet fejezetei és azon belül alfejezetei és a dolgozat párhuzamban vannak.

3.1. Függvények a 9. évfolyamon

Ebben az évben ismerkednek meg a tanulók a lineáris, abszolút érték, másodfokú, négyzetgyök és törtfüggvényekkel. Fel kell ismerniük a függvények alakját, tudniuk kell a függvényeket értéktáblázat nélkül ábrázolni, és ismerniük kell a függvény transzformáció lépéseit. Mindezek szemléltetésére és az új anyag megértésében is segítségünkre lehetnek a következő munkalapok.

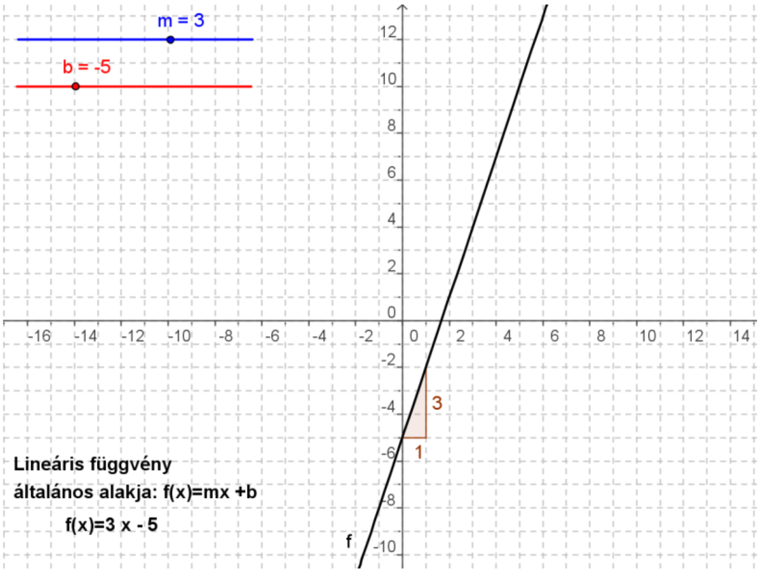
3.1.1. Lineáris függvény

Már általános iskolában is ábrázolnak a diákok lineáris függvényeket, de többnyire csak értéktáblázat használatával. Sok tanulónak nehéz megértetni a lineáris függvény képlete és grafikonja közti összefüggést, ami lehetővé teszi a függvény táblázat nélküli ábrázolását.

Mint tudjuk, a lineáris függvény általános alakja: **f(x)=mx+b**.
Megtehetjük azt, hogy úgy ábrázoljuk a lineáris függvényt, hogy a képletben szereplő **m** és **b** helyére konkrét számokat írunk. Ha az a célunk, hogy egy adott lineáris függvényt ábrázoljunk, akkor nincs más teendőnk, mint közvetlen adatbevitellel a parancssorba beírni a függvény hozzárendelési szabályát. Pl. **3*x-5** és a program kirajzolja a konkrét függvény grafikonját. A program ezen tulajdonságát is jól tudjuk használni, ugyanis mindenféle előkészület nélkül gyorsan tudunk függvényt ábrázolni.

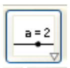
Ez nagy segítség lehet egy-egy konkrét feladat megoldásában, vagy csak a példa ellenőrzésében.
Viszont ha az a célunk, hogy a diákok táblázat nélkül gyorsan ábrázoljanak függvényeket, vagyis megértsék a függvény képlete és grafikonja közti összefüggést, akkor az ábrán látható munkalapot célszerű használnunk.

A munkalap megtalálható a melléklet **Függvények** fejezet, **9. évfolyam** alfejezet Munkalap1: lineáris függvény cím alatt.
Ennek a munkalapnak a geometriai ablakát látjuk az alábbi **3. ábrán**.
Az munkalap részletes leírása az alábbiakban olvasható.



3. ábra

A fenti **f(x)=mx+b** hozzárendelésben az **m** és **b** paraméterek határozzák meg a függvény képletét és így a grafikonját. Ezt a két paramétert tudjuk változtatni a dinamikus munkalapon a csúszkák segítségével. Ez a két paraméter a munkalapon **Szabad alakzatok** közé kerül.
Az **m** paraméter az egyenes meredekségét jelenti, melynek megváltoztatása hatással van az egyenes grafikonjára. Nemcsak az egyenes meredeksége, de a kirajzolt meredekségi háromszög is változik, **m** értékének függvényében. A **b** paraméter értékének változása az **y** tengellyel való **(0,b)** metszéspontot változtatja meg. Mindkét változást láthatjuk a lineáris függvény hozzárendelési szabályában.
Ha a munkalapon megváltoztatjuk az **m** és **b** paraméterek értékét, akkor jól megfigyelhetők a grafikon változásai, melyek segítenek a táblázat nélküli ábrázolásában. Éppen ezért használható a munkalap a tanórán szemléltetésre, az új anyag bemutatására. Természetesen használhatják a diákok is, az otthoni tanulásban. Segítségükre lehet a megértésben, de a házi feladat ellenőrzésében is.

A feladat megvalósítása nagyon egyszerű. Először felveszünk két csúszkát az **m** és **b** számoknak. Csúszkát úgy tudunk létrehozni, hogy az Eszközsoron kiválasztjuk a csúszka  ikonját, és a rajzlapon kattintva megjelenik egy beviteli ablak, amiben be kell állítani, hogy a csúszka szög, vagy szám legyen-e. Továbbá meg tudjuk határozni a csúszka intervallumát, beosztását, helyzetét és szélességét. A beállítások után megjelenik egy csúszka a rajzlapon, melyet tetszőlegesen mozgathatunk a rajzlapon és a csúszka környezeti menüje segítségével át tudunk nevezni és formázni.

Fontos, a program minden alakzatot automatikusan elnevez az ABC soron következő betűjével, a neki megfelelő formátumban (szakaszokat, egyeneseket kis betűvel, pontokat nagy betűvel). Így célszerű az **a**-val jelölt csúszkát átnevezni **m**-re.

Miután kész a két csúszka, melyeknek a neve **m** és **b** lesz, a függvényt kell meghatároznunk közvetlen adatbevitellel. Vagyis a parancssorba **m*x+b** utasítást kell írnunk és ezzel meg is adtuk a lineáris függvény hozzárendelési szabályát. A program értelemszerűen kirajzolja az **m** és **b** értékétől függően az aktuális lineáris függvényt és a függvénynek pedig automatikusan az **f(x)** nevet adja. Természetesen a kirajzolt függvény formázható, vonal színe, vastagsága, stílusa beállítható.

Mivel a függvény az **m** és **b** paramétertől függ, ezért ez **Függő alakzatok** közé kerül a munkalapon és így az őt meghatározó paraméterek függvényében változik.

Ha a függvény grafikonjára illesztünk egy **e** egyenest, akkor a parancssorba írt **meredekség[e]** parancs kirajzol nekünk egy meredekségi háromszöget, ami szintén segíthet az ábrázolás megértésében. Mivel magára az **e** egyenesre nincs szükség, csak a hozzátartozó meredekségi háromszögre, ezért célszerű az **e** egyenest a **Segéd alakzatok** közé sorolni, melyet egyszerűen az egyenes környezeti menüjével szabályozhatunk.

Az elkészült munkalapon igaz az algebra ablak nem látható, viszont a fontos információkat: általános alak, hozzárendelési szabály szöveg beszúrással a rajzlapon megjelenítettem. Szöveget beszúrni az eszközsor  ikonjával lehet. Miután kiválasztjuk az ikont az eszközsoron, a rajzlapon kattintva megjelenik a beviteli ablak, ahova be kell írnunk a megjeleníteni kívánt szöveget.

Fontos, hogy a szöveget „ ” jelek közé kell tenni és a paraméterek konkrét értékét pedig „ ” nélkül kell beírni. Amennyiben egymás mellett több dolgot szeretnénk megjeleníteni, úgy azokat + jellel kell összekapcsolni.

Ebben a feladatban a beviteli ablakba a hozzárendelési szabály megjelenítéséhez a következő utasítást írtam be: **„f(x)=”+f** .
Az elkészült szövegrészek a többi alakzathoz hasonlóan a rajzlapon tetszőlegesen áthelyezhetők és formázhatók.

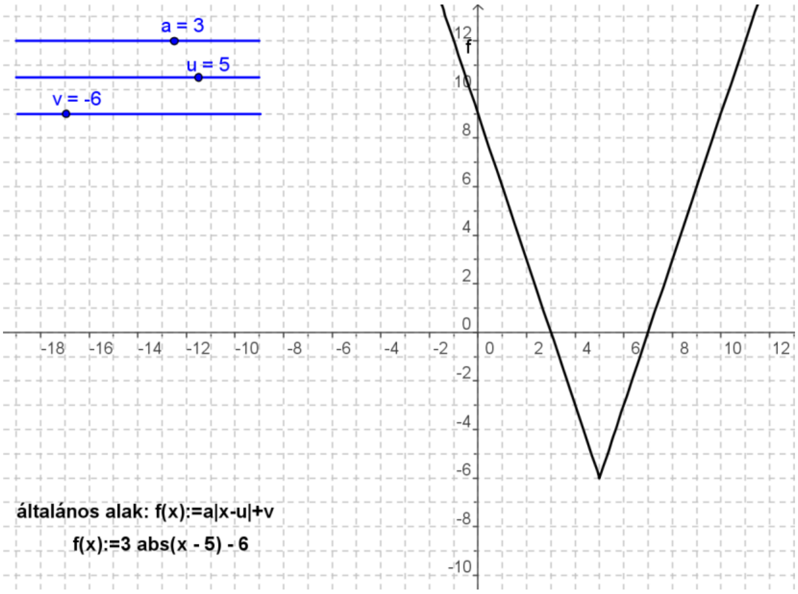
Összegezve elmondhatjuk, hogy a feladat megvalósítása nem nehéz, viszont igen szemléletes. Jól láthatók a munkalapon, a lineáris függvény hozzárendelési szabálya és grafikonja közötti összefüggések és ezáltal jól használható a matematika órákon és az otthoni tanulásban is.

2.1.2. Abszolút érték függvény

A lineáris függvények után az abszolút érték függvény következik a tananyagban. Itt kell megismerkedni a diákoknak a függvény transzformáció alapjaival, melyet a következő függvényeknél már könnyebben tudnak alkalmazni.

Ismert, hogy az abszolút érték függvény általános alakja: **f(x)=a|x-u| +v**.
Éppen ezért, ha egy konkrét abszolút értékes függvényt szeretnénk ábrázolni, megtehetjük, hogy a parancssorba beírjuk az ábrázolandó függvény hozzárendelési szabályát a megadott formában.
Ha az alapfüggvényt szeretnénk megjeleníteni, akkor a GeoGebra beépített függvényét kell használnunk és a parancssorba a következő parancsot kell írnunk: **abs(x)**.
Ha pedig az alapfüggvény transzformáltját akarjuk ábrázolni, akkor a parancssorba a hozzárendelési szabályban szereplő **a**, **u**, **v** paraméterek helyébe konkrét számokat kell írnunk. Pl.: **2*abs(x-3)+1**. Amennyiben a programnak ezt a funkcióját alkalmazzuk, akkor az megkönnyíti a függvények grafikonjának megrajzolását, így gyorsan tudunk szemléltetni a tanórákon. Természetesen használhatjuk megadott feladatok, például házi feladatok, dolgozat példák ellenőrzésére is.

Viszont, ha az a célunk, hogy megértessük a diákokkal a függvény transzformáció elemeit, akkor ajánlom a következő dinamikus munkalapot.
Az oldalt a szóban forgó melléklet Munkalap2: abszolút érték függvény munkalapja tartalmazza. A munkalap bemutatásához, nézzük meg a geometriai ablakról készült képet, melyet a **4. ábrán** láthatunk.



4. ábra

Az ábrán látható, hogy az abszolút érték függvény hozzárendelési szabályában szereplő **a**, **u**, **v** paraméterek értéke a csúszkán állítható be, azaz változtatható. Ezek ismeretében kapjuk az aktuális függvény grafikonját.

Nézzük meg a munkalap működését. Az ábrán is látható a, u és v paraméterek szabadon változtathatók, azaz **Szabad alakzatok**. Ezek változása megfigyelhető a függvény alakján és elhelyezkedésén.

Az **a** paraméter módosításával a függvény alakja változik. Az **a** értékének változtatásával megfigyelhető, hogy ha **a**>0 akkor a **V** alakú függvény felfelé áll, viszont ha **a**<0 akkor pedig lefelé fordul. (Persze a=0 esetén konstans függvényt kapunk.) Továbbá , ha |**a**|>1 akkor az alapfüggvényhez képest egy nyújtott függvényt kapunk, míg |**a**|<1 akkor pedig zsugorított függvényt kapunk. Sőt azt is be lehet mutatni, hogy az **a** paraméter az abszolút érték függvényt alkotó két félegyenes meredekségét adja.

Az **u** és **v** paraméterek a függvény elhelyezkedését határozza meg a koordinátarendszerben. Az **u** paraméter csúszkán történő változtatásával látható, hogy a függvény grafikonja az **x** tengely mentén tolódik el, míg a **v** paraméter módosításával az **y** tengely mentén tolódik el. Természetesen minden paraméter változás hatására változik a függvény hozzárendelési szabálya is, amit a munkalapon nyomon követhetünk.

A feladat megvalósítása sokban hasonlít a lineáris függvényhez. A lényeges különbség, a parancssorba beírt utasítás, ami az abszolút érték függvény grafikonját adja: **a*abs(x-u)+v**.

Azt hiszem, ezzel a munkalappal igen jól szemléltethetők a függvény transzformáció lépései. Mindenféleképpen hasznosnak találom a tanórai kivetítést.

3.1.3. Másodfokú függvény

A másodfokú függvények ábrázolásánál különösen célszerű használnunk a GeoGebra programot. Amíg lineáris függvényt, vagy abszolút érték függvény grafikonját akár vonalzóval is meg tudjuk rajzolni néhány pontjából, addig a másodfokú függvény paraboláját 7-8 pontból is csak pontatlanul tudjuk ábrázolni. Különösen nehéz dolog úgy szemléltetni a parabolát, vagy más görbét, ha még csak négyzetrácsos tábla sincs a tanteremben. Ilyenkor óriási segítség a projektor, melyen kivetíthetjük a programunkat.

A másodfokú függvényünk általános alakja: $\mathbf{f(x)=a(x-u)^2+v}$.

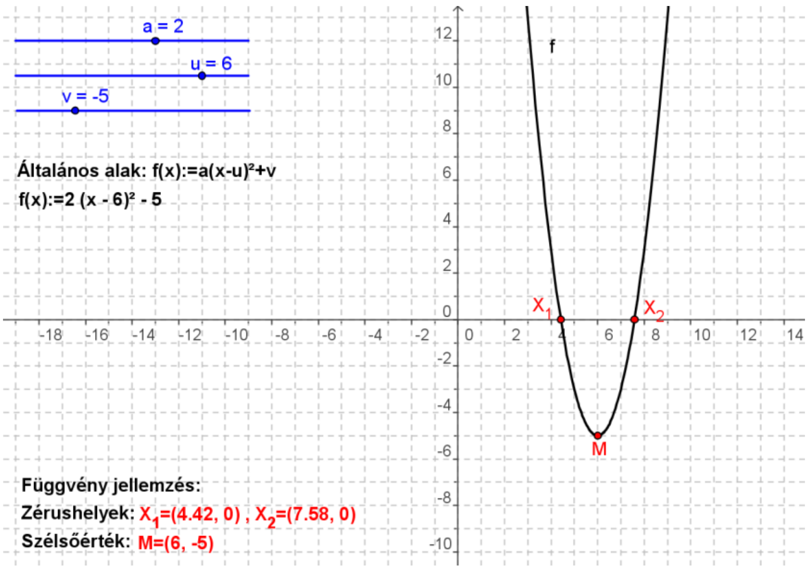
Amennyiben az $\mathbf{f(x)=x^2}$ alapfüggvényt szeretnénk ábrázolni, a parancssorba **x^2** vagy $\mathbf{x^2}$ parancsot kell írnunk. A felső indexet a parancssor melletti legördülő listából tudjuk kiválasztani. Az összetett függvények esetében pedig -az abszolút értékes függvényhez hasonlóan- itt s megtehetjük, hogy a paraméterek helyébe konkrét számokat írunk. Pl. : **f(x)=3(x-5)^2+2 .**

A következő munkalap pedig a másodfokú függvény transzformációjának bemutatása mellett, tartalmazza a függvény jellemzés néhány fontos lépését is.

A feladatot a melléklet Munkalap3: másodfokú függvény című oldalán találjuk meg.

A munkalapról készült kép ábráját pedig az **5.ábra** mutatja.

Az ábrán a hozzárendelési szabályban szereplő **a**, **u**, **v** paraméterek változtathatók.



5. ábra

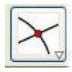
Ezek függvényében kapjuk a parabola grafikonját és az aktuális hozzárendelési szabályt. Eddig a feladat hasonlít az abszolút értékes feladatra, éppen ezért szintén szemléltetésre és a függvény transzformáció tanítására alkalmas. Különbség a parancssorba írt utasítás, ami itt a következő: $\mathbf{a*(x-u)^2+v}$.

Azonban ezen a munkalapon feltüntettem a függvény zérushelyeit és a szélsőértékét. Ha a paramétereket változtatjuk a csúszkán, úgy változnak a zérushelyek és a szélsőértékek is. Amennyiben nincs a függvénynek és az x tengelynek közös pontja, azaz nem létezik zérushely, akkor az $\mathbf{X_1}$ és $\mathbf{X_2}$ értékek mellett a **nem definiált** kifejezés jelenik meg.

Ha a munkalapon megvizsgáljuk a paraméterek a zérushely és a szélsőérték összefüggését, akkor érdekes következtetést tudunk levonni. Vagyis a legszembetűnőbb felfedezés, hogy a parabola szélsőértékének koordinátái pontosan az **u**, **v** értékek: **M(u,v)**. Ezt az összefüggést, a diákok többsége hamar felfedezi. A másik fontos összefüggést, hogy mikor van a parabolának zérushelye, csak nehezebben fedezik fel. Viszont, ha gyakorlásképpen otthon próbálkozik a paraméterek állításával, akkor felfedezi, **v**=0 esetén pontosan egy zérushelye van a parabolának. Illetve ha (**a**>0 és **v**<0) vagy (**a**<0 és **v**>0) esetén létezik két zérushelye a függvénynek.

Az itt megjelenített zérushelyek és szélsőérték hasznos lehet más függvények jellemzésénél is. Ezért néhány szóban ismertetetem a megvalósítást.

A zérushelyek megjelenítését kétféleképpen tudjuk létrehozni:

- Az eszközsoron kiválasztjuk a két alakzat metszéspontja:  ikont, és kijelöljük a rajzlapon a metszéspontokat. Ilyenkor a két alakzat, aminek a metszéspontját keressük vastagvonallal látszik, így tudjuk pontosan a metszéspontot kijelölni.
- Vagy még egyszerűbben a parancssorba írt **metszéspont[e,f]** paranccsal, ahol e az x tengelyt, és f pedig a parabolát jelenti. Ilyenkor egyből megkapjuk a két alakzat mindegyik (mindkét) metszéspontját.

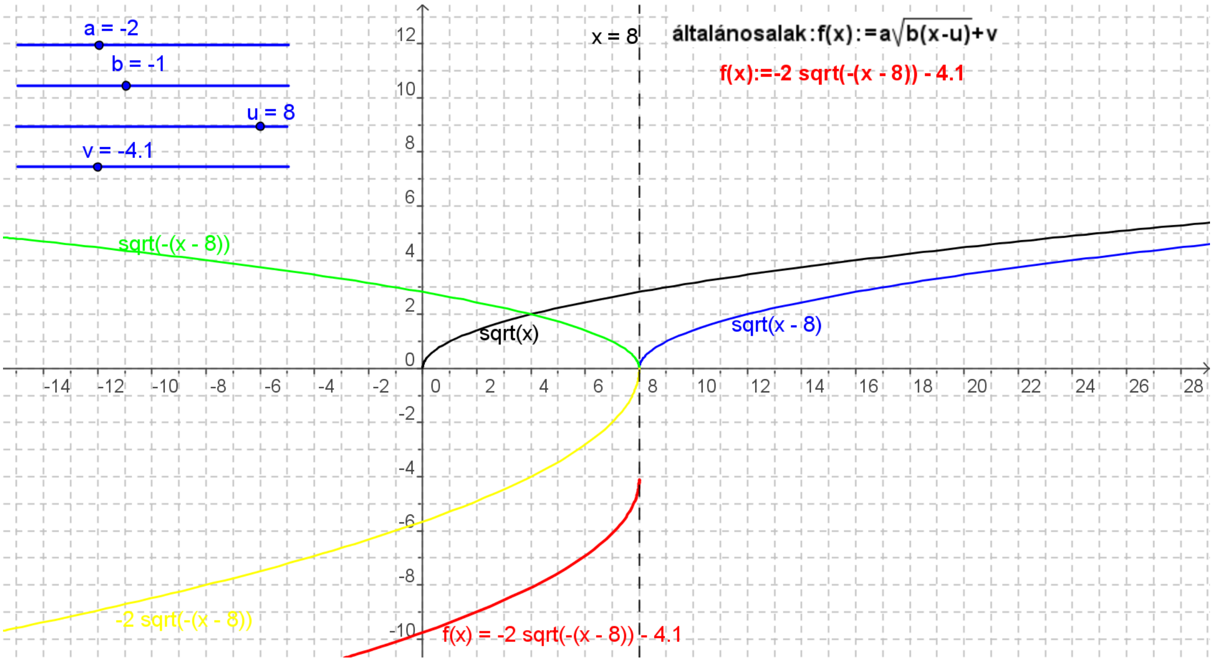
A szélsőérték megvalósítása pedig csak paranccsal oldható meg, a **szélsőérték[f]** parancsot kell begépelnünk a parancssorba.

Végül is ez a munkalap az előzőknél többet tud, nemcsak a függvény transzformáció tanításában, tanulásában használható, hanem a függvény jellemzés lépéseit is szemléletesebbé tehetjük vele.

3.1.4. Négyzetgyök függvény

A négyzetgyök függvény hozzárendelési szabályának általános alakja: $a\sqrt{b(x-u)}+v$.

Egy ilyen alakban megadott függvény ábrázolása már valamivel nehezebb, mint az előző függvények voltak. Ugyanis, itt már több paraméterünk van. Éppen ezért itt lépésenként megnézzük, melyik paraméter hogyan befolyásolja a függvény grafikonját. Tekintsük meg a melléklet Munkalap4: négyzetgyök függvény dinamikus oldalát, melynek rajzlapja az alábbi **6. ábrán** látható.



6. ábra

Ha csak az alap négyzetgyök függvényt szeretnénk ábrázolni, akkor a program beépített **sqrt(x)** parancsát kell a parancssorba írnunk és kapjuk az ábrán feketével megrajzolt alapfüggvényt.

Az **u** paraméter változtatásával a kék színnel jelölt függvény helyzete változik, mégpedig az **x** tengely mentén eltolódik a grafikon. Ha a **b** paraméter értékét is változtatjuk, akkor a zölddel rajzolt függvény képe változik. Érdemes megfigyelni, hogy ha b paraméter értéke negatív, akkor a függvény grafikonja megfordul és ha **b**=-1 akkor a függvény az **y** tengellyel párhuzamos egyenesre (esetünkben **x=8**) tükröződik.

Az **a** paraméter értékének változása a függvény **x** tengely irányú transzformációját befolyásolja, melyet a sárgával jelzett grafikon mutat. Ha az **a** értéke negatív, akkor a függvény az **x** tengelyre tükröződik és |**a**| nagyságától függően nyúlik, vagy zsugorodik. A transzformáció utolsó lépése az **y** tengely irányú eltolás, melyet a **v** paraméter mozgatásával tudunk szabályozni.

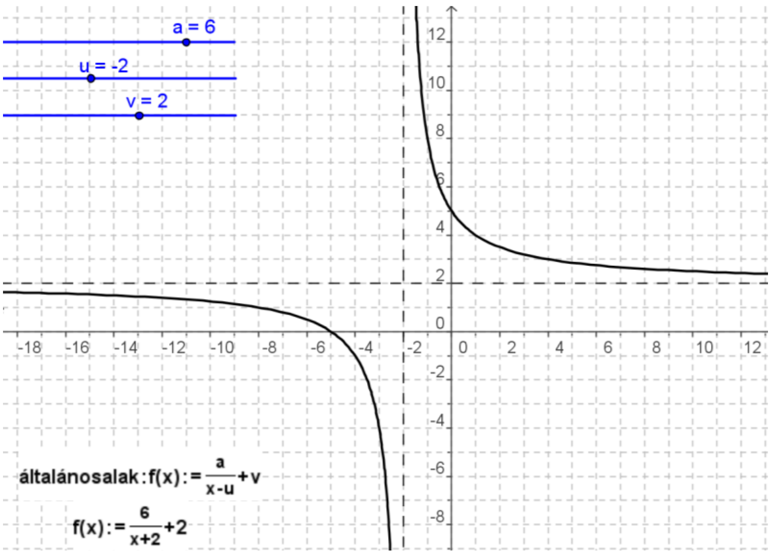
A feladat megvalósítása a következő lépésenként történt. A függvény transzformációnak megfelelő műveleti sorrendbe beírtam a parancssorba az egyes függvények hozzárendelési szabályát, természetesen a képletekben a megfelelő paramétereket írtam. Végül pedig a függvényeket megformáztam és a feliratnál nem a függvény nevét, hanem az értékét jelenítettem meg.
Érdemes megjegyezni, hogy gyökjelet a rajzlapon, csak **LaTeX formula** segítségével tudunk megjeleníteni. Ehhez a szöveg beszúrása mód kiválasztása után, a beviteli ablak alatt ki kell választani a **LaTeX formula** legördülő listájából a megjelenítendő szimbólumot és az megjelenik a beviteli ablakban, majd a rajzlapon.
Ennél a feladatnál az összetettsége miatt, érdemes a **Navigációs eszköztáron** lépkedve megnézni a függvény transzformáció egyes lépéseit, vagy a **Lejátszás** gombra kattintva az egész folyamatot lejátszani.

Összefoglalva ajánlom ezt a dinamikus munkalapot a tanórán a négyzetgyök függvény szemléltetésére, a függvény transzformáció bemutatására. Különösen ajánlom, a szerkesztés lépéseinek egymás utáni többszöri lejátszását, mellyel könynyen rögzülhet a tanulókban a transzformáció helyes sorrendje.

3.1.5. Lineáris törtfüggvény

A lineáris törtfüggvények ábrázolását dinamikus munkalapon különösen szemléletesnek találom. Az eddigi függvényekhez hasonlóan itt is megtehetjük, hogy magát az alapfüggvényt, vagy csak egy konkrét függvényt ábrázolunk, mindkét esetben szép grafikont, hiperbolát kapunk.

Amennyiben egy átfogó, bármilyen törtfüggvényt ábrázoló munkalapot szeretnénk bemutatni a diákoknak, akkor ajánlom a következő Munkalap5: lineáris törtfüggvény nevű oldalt a szóban forgó mellékletben.
A dinamikus oldal rajza itt látható a **7. ábrán**.
A munkalapon természetesen



7. ábra

módosíthatjuk a paramétereket és más-más grafikont kapunk. Az **a** paraméter a függvény nyújtását, míg az **u** és **v** paraméterek pedig a tengelyeken való eltolódást adják. Az ábrán szaggatott vonallal fel van tüntetve a hiperbola grafikonjához tartozó aszimptoták, melyek elhelyezkedését az **u**, és **v** paraméterek határozzák meg.
A feladat megoldásának lényeges lépése, a parancssorba beírt **a/(x-u)+v** utasítás. A rajzlapon pedig a törtkifejezés megjelenítését az előbb ismertetett **LaTeX formula** segítségével oldottam meg.
Az aszimptoták megrajzolását a legegyszerűbb módon két egyenes: **x=u** és **y=v** felvételével oldottam meg. Másik megoldás az **aszimptota[ ]** parancs használata lenne.[1]

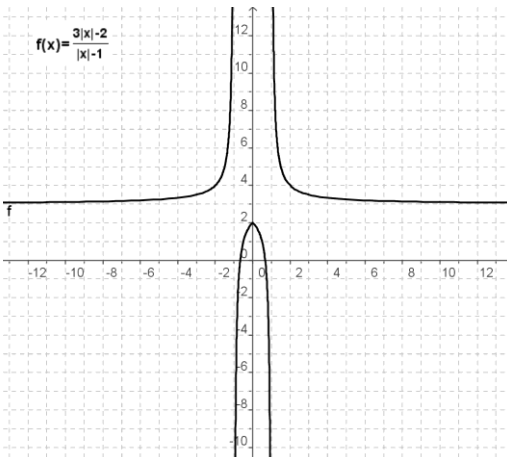
Ezt a munkalapot ajánlom szemléltetés céljából, tanórákon kivetítőn bemutatva. Meggyőződésem, hogy erről a munkalapról jobban látják a törtfüggvény ábrázolását a diákok és így maguk is szebb ábrákat tudnak készíteni.

3.1.6. Összetett függvények

Ebben a fejezetben néhány olyan függvényt mutatok be, amelyek az előbbi függvények összetételéből keletkezik. A következő három függvény a sokszínű Matematika tankönyvcsalád **9**. évfolyamos tankönyvében található.
A feladatok megoldásai megtalálhatók a szokásos melléklet Munkalap6: összetett függvények oldalán, ami tulajdonképpen a három példának megfelelően három munkalapot tartalmaz. Nézzük meg ezt a három feladatot.

103. old. / 2.b

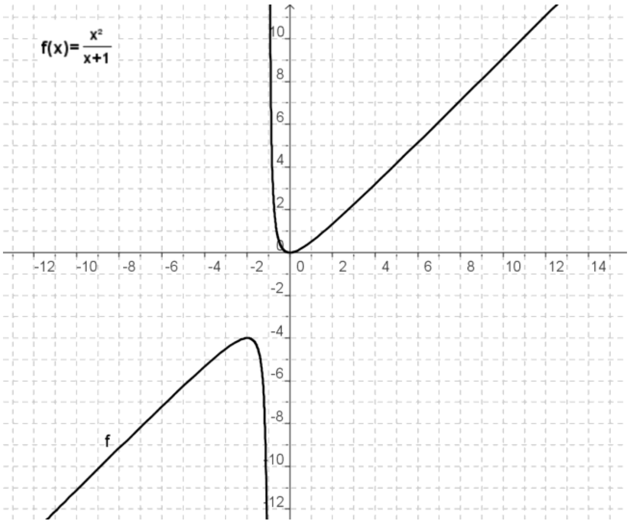
Az ábrázolandó függvény hozzárendelési szabálya és grafikonja is látható a munkalapon és itt a **8. ábrán**.
Mivel ez egy konkrét feladat, ezért itt a függvény nem mozgatható a rajzlapon, azaz **fix alakzat**. Ezt az alakzatot kijelölve, az alakzat környezeti menüjében tudjuk beállítani. Megoldás: képlet beírása a parancssorba.



8. ábra

103. old. / 2.d

[1] A parancs bemutatása a koordináta geometria témakörben lesz.



9. ábra

Az ábrázolandó függvény képlete és grafikonja látható a munkalapon és itt a **9. ábrán**.

Az ábrázolt függvény a munkalapon fix alakzat, ezért a grafikon elkészítése csak a szabály megadásából állt.

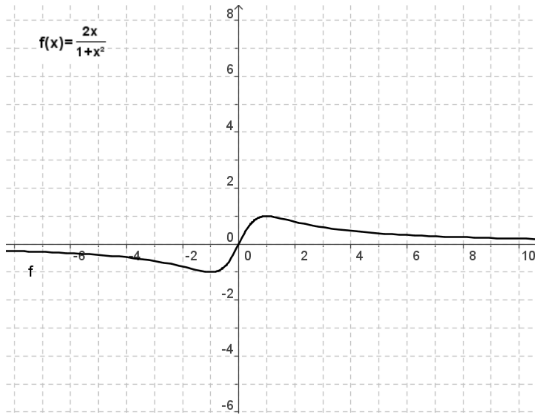
Viszont ennél a feladatnál is, a függvény grafikonjának megrajzolása középiskolásoknak is csak sok számítással lenne megoldható.

110. old. / 3. példa

Az itt ábrázolt függvény a Newton-féle szerpentin.

Ennek a feladatnak a megoldása is elég sok számítást igényel, nehezen tudunk róla olyan pontos ábrát készíteni, mint amilyet a munkalapon és itt a **10. ábrán** is látunk róla.

Ezért ezt a példát is érdemesnek tartom a tanórán kivetíteni.



10. ábra

Az előbb látott példák szebbé tehetik a tanórai feladatok bemutatását, vagy a már kiadott feladat ellenőrzését. Nekünk tanároknak különösen nagy segítség, mert nem kell a bonyolult feladatok felrajzolására sok időt fordítanunk.

3.2. Függvények a 10. évfolyamon

Ebben az évben ismerkednek meg a diákok a trigonometrikus függvényekkel. Meg kell tanulniuk a trigonometrikus függvények ábrázolásának szabályait, és tudniuk kell az eddig tanult függvény transzformációt a trigonometrikus függvényeknél alkalmazni.

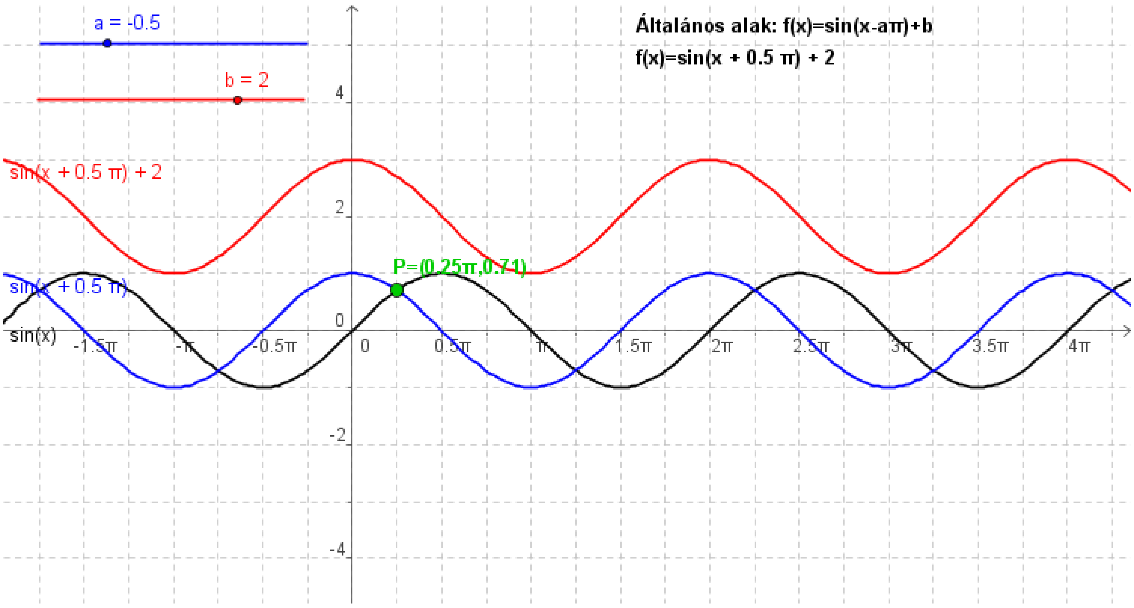
Trigonometrikus függvények ábrázolásánál –mint már említettem- a program elindítása után érdemes megváltoztatni az egységet az x tengelyen. Ennek módja, ha a

Beállítások menü **Rajzlap** pontját kiválasztjuk, és ott a **Tengelyek** fül alatt az **x** tengely egységét **π**-re állítjuk. Másik lehetőség az egység megváltoztatására, ha a **Rajzlap** környezeti menüjéből választjuk a **Tulajdonságok** pontot és azon belül pedig a **Tengelyek** fület.

A következő munkalapok, melyek a trigonometrikus függvények tanításában, tanulásában segítenek, a melléklet **Függvények** fejezetének **10. évfolyam** részében találhatók, a megfelelő címek alatt. Nézzük is meg ezeket sorban.

3.2.1. Szinusz függvény

A szinusz függvény grafikonját a fent említett melléklet Munkalap7: szinusz függvény címe alatt találjuk meg, és a munkalapról készült kép a **11. ábrán** látható.



11. ábra

Az ábrán feketével jelöltem a sin(x) alapfüggvény grafikonját. **P** pont a függvényen mozgatható és segítségével leolvashatjuk a szinuszgörbe pontjainak koordinátáit.

Az **a** és **b** paraméterek a csúszkán változtathatók és segítségükkel a szinusz függvény elhelyezkedését tudjuk változtatni. Az **a** paraméter megváltozása a szinusz függvény grafikonját az **x** tengelyen, míg a **b** paraméter módosítása a szinuszgörbét az **y** tengely mentén tolja el. Ezeket a változásokat megkülönböztetésképpen kékkel illetve pirossal jelöltem.

A feladat megvalósítása során az alapfüggvényt a **sin(x)** beépítetett függvénnyel ábrázoltam. Míg az eltolt függvények ábrázolásánál az **a** és **b** paraméterek felvétele után a hozzárendelési szabályban a megfelelő paramétereket alkalmaztam:

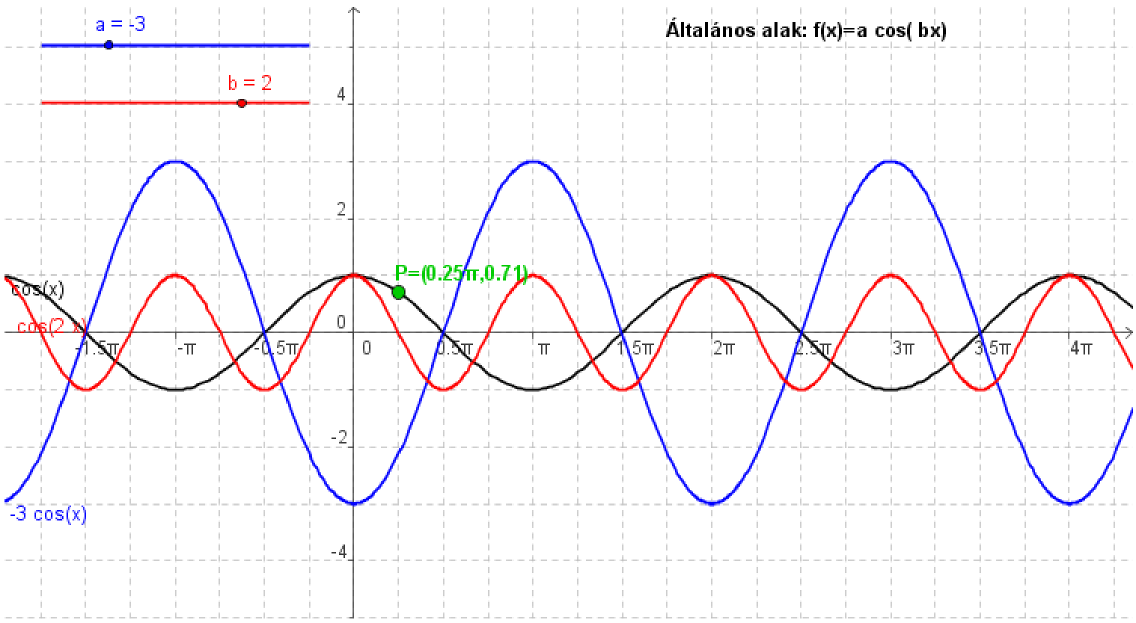
sin(x-a*π)+b. A függvények grafikonja mellett pedig az áttekinthetőség miatt az értékét jelenítettem meg.

A **P** pont megjelenítésében a radiánban kifejezett értéket átalakítottam, hogy szemléletesen, **π**-vel kifejezve kapjuk meg az **x** koordinátát. Pl. **P(0.79,0.71)** helyett **P(0.25π, 0.71)** jelenítettem meg. Ehhez az **x(P)** és **y(P)** beépített parancsokkal, szétválasztottam a **P** pont **x** és **y** koordinátáit, majd az **x** koordinátát elosztottam 3.14-gyel, így kaptam meg a **π** együtthatóját. Ezeket az értékéket **c=x(P)/3.14** és **d=y(P)** a könnyebb áttekinthetőség miatt a **Segéd alakzatok**hoz soroltam, majd a szöveg beszúrása segítségével megjelenítettem a pont koordinátáit: **"P=(" + c + "π," + d + ")"**.

Ez a dinamikus munkalap segít, az alapfüggvény megrajzolásában, szemléltethető vele a szinuszgörbe, leolvashatók a grafikon koordinátái. Valamint a függvény transzformáció, bemutatására is alkalmas. Az ábra áttekinthetősége miatt a transzformációhoz tartozó nyújtást és zsugorítást a következő munkalapon mutatom be a koszinusz függvénnyel párhuzamosan.

3.2.2. Koszinusz függvény

A feladathoz tartozó munkalap megtalálható a melléklet Munkalap8: koszinusz függvény oldal alatt, és a geometria ablak rajza pedig a lenti **12. ábrán** látható.



12. ábra

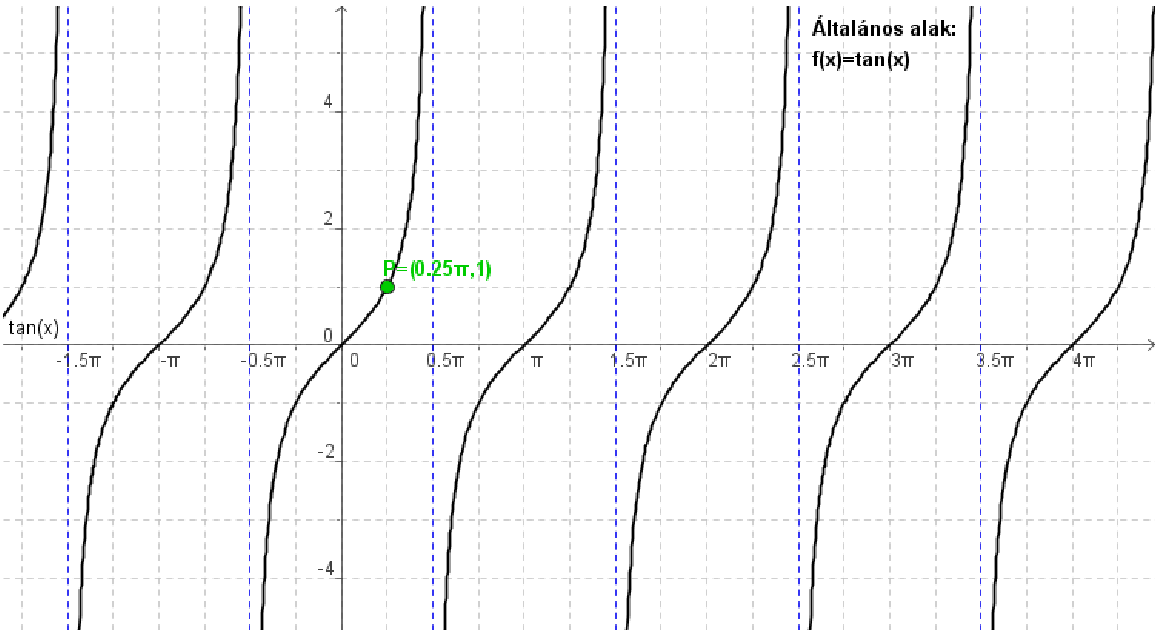
A **12. ábrán** fekete szín jelöli az alap koszinusz függvény grafikonját, melyet a **cos(x)** beépített paranccsal ábrázoltam. A **P** pont itt is befutja a koszinuszgörbét, segítségével leolvashatjuk a pontok koordinátáit.

A szinusz függvényhez hasonlóan az **a** és **b** paraméterek a függvény transzformációt befolyásolják. Az **a** paraméter megváltoztatása a függvény **y** tengely irányú nyújtását, míg a **b** paraméter az **x** tengely irányú nyújtást (függvény periódusát) befolyásolja. A kékkel és pirossal ábrázolt függvények egymástól függetlenek, **a*cos(x)** és **cos(b*x)** parancssorba írt utasítással hoztam létre őket. (Érdekes lenne ábrázolni az **a*cos(b*x)** függvényt is, de ez az ábra áttekinthetőségét zavarná.)

Ez a munkalap is nagyon szemléletes, segítségünkre lehet már az alapfüggvény megrajzolásában és a transzformált függvények bemutatásában is. Nem kell részletezni, mennyire munkaigényes a táblán megszerkeszteni a trigonometrikus függvényeket és ezek transzformáltjait.

3.2.3. Tangensfüggvény

A melléklet Munkalap9: tangens függvény oldal alatt találjuk a szóban forgó munkalapot, melynek rajzát az alábbi **13. ábra** mutat.



13. ábra

Ebben a példában az alapfüggvényt ábrázoltam, melyet a **tan(x)** parancs segítségével lehet létrehozni. A **P** pont itt is befutja a tangensfüggvény grafikonját, segítségével leolvashatjuk a görbe pontjainak koordinátáit. Továbbá jelöltem a függvény sza-

kadásait szaggatott vonallal. Itt nem készítettem függvény transzformációt, annak menete az előzőkhöz nagyon hasonló lenne.
Viszont ebben a részben említem meg a trigonometrikus függvények használatának egy másik lehetőségét. Bármelyik trigonometrikus függvénynél megtehetjük azt, hogy csak az alapfüggvényt ábrázoljuk és azt az egérrel kijelölve el kezdjük mozgatni a koordinátarendszerben. Így a program minden esetben megadja az elmozgatott függvény hozzárendelési szabályát és ezzel is egyfajta függvény transzformációt hoztunk létre. Természetesen megtehetjük azt is, hogy eleve a már transzformált függvény szabályát írjuk a parancssorba, amit ábrázolni szeretnénk.
Az most említett módszer nem annyira szemléletes, mint az előbbi munkalapok kidolgozása, de jóval gyorsabb. Ezért akkor célszerű alkalmaznunk, mikor már csak ellenőrizni szeretnénk a példáinkat. A tangensfüggvény transzformációját már megoldhatjuk az előbbi módszerek segítségével is, ugyanis már a transzformációt ismerik a diákok többsége.

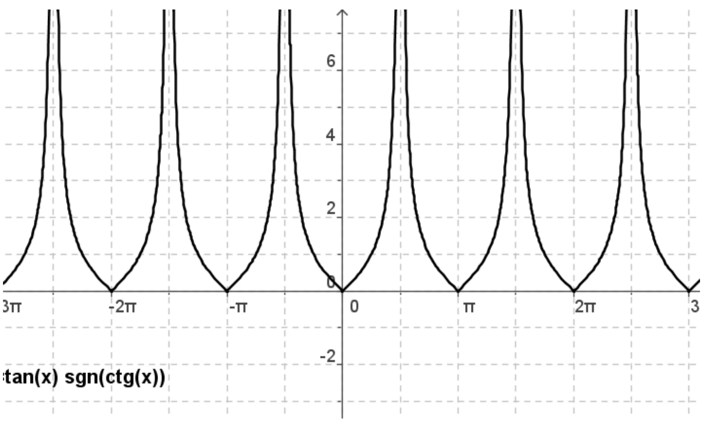
Itt érdemes megjegyezni, hogy a kotangens függvény ábrázolására nincs külön beépített parancs, ezért azt a tangensfüggvény segítségével tudjuk megoldani. Vagyis a parancssorba az **1/tan(x)** utasítást kell írnunk és kapjuk a kotangens függvény grafikonját.

3.2.4. Trigonometrikus összetett függvények

Ebben a részben két igen bonyolult, **10.**-es tankönyvi feladat megoldását mutatom be. A melléklet Munkalap10: trigonometrikus összetett függvények oldala tartalmazza a két feladat megoldását, különböző munkalapokon.

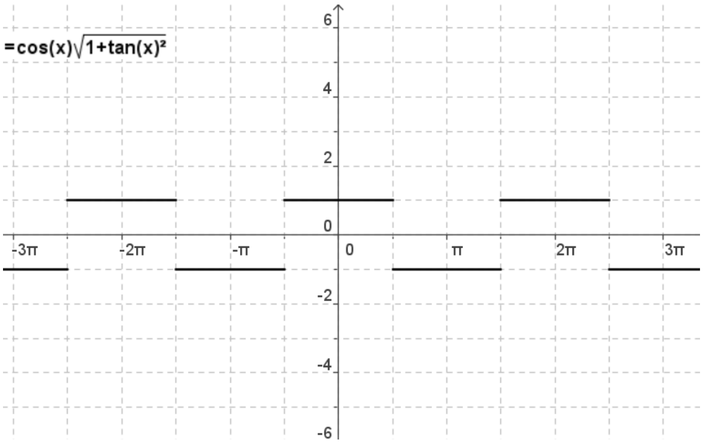
219. old / 4.b

A függvény hozzárendelési szabálya és a függvény grafikonja a **14. ábrán** látható. A függvény ábrázolásához a **tan(x)** és a **sgn(x)** parancsot használtam. Így a parancssorba írt utasítás: **tan(x)*sgn((1/tan(x))**.



14. ábra

223. old. / 1.a



15. ábra

A feladatban szereplő ábrázolandó függvény szabálya és a grafikonja a **15. ábrán** látható.
A megoldásban a **cos(x)** és **tan(x)** beépített függvények mellett az **sqrt(x)** parancsot kell használni. Így a függvény ábrázolásához a beírandó összetett parancs: **cos(x)*sqrt(1+tan(x)^2)**.

Mint láttuk, ezek a bonyolult függvények egyetlen összetett utasítással ábrázolhatók. Ezeket a példákat csak a legügyesebb diákok tudnák papíron megoldani. A differenciált oktatásban a jobb képességűeknek ajánlom a feladatok megoldását önállóan, majd az ellenőrzést a munkalapon. A többieknek pedig az is elegendő, ha csak kivetítve látnak ilyen függvényeket és némi magyarázatot fűzünk hozzá.

3.3. Függvények a 11. évfolyamon

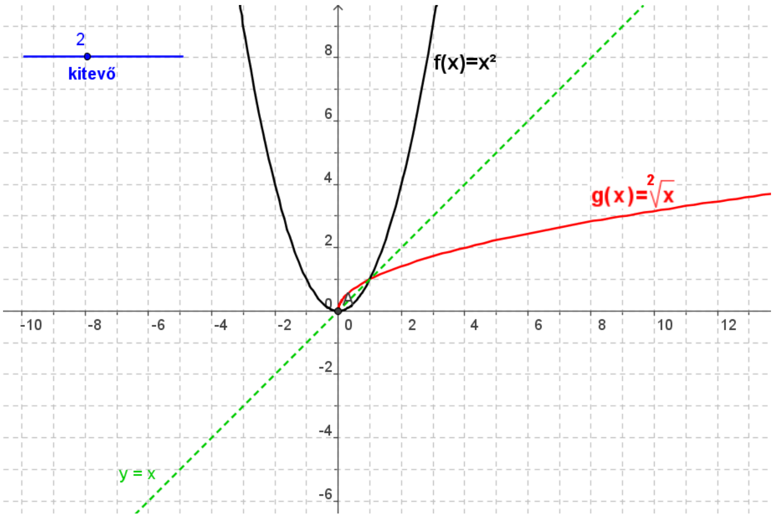
Ebben a tanévben találkoznak a diákok a hatványfüggvényekkel, gyökfüggvényekkel, exponenciális függvényekkel és logaritmusfüggvényekkel.
Itt már nemcsak a függvények ábrázolását és a függvény transzformáció alkalmazását várjuk el, hanem további általános ismeretek elsajátítása is szükséges. Ezeket az ismereteket és összefüggéseket mutatom be a következő három munkalapon, melyeket a melléklet **Függvények** fejezetének **11. évfolyam** alatt találunk.

3.3.1. Hatványfüggvények és gyökfüggvények

A hatványfüggvények és gyökfüggvények közül az $\mathbf{x^2}$ és $\mathbf{\sqrt{x}}$ függvényekkel már találkoztak a diákok korábban. Itt a két függvény közötti összefüggést tanulják meg. Valamint kiterjesztjük a hatványfüggvényeket és gyökfüggvényeket 2-nél nagyobb kitevőre.
Ezek bemutatására szolgál a következő Munkalap11: hatványfüggvények és gyökfüggvények oldala, melyet a mellékletben találunk, itt pedig a **16. ábrán** mutatok be.

A munkalapon a függvény és a gyökfüggvény kitevője a csúszkán változtatható.

Ennek változásával kapjuk az aktuális hatványfüggvényt és gyökfüggvényt, valamint a hozzárendelési szabályukat.



16. ábra

Az ábrán és így munkalapon látható, hogy a hatványfüggvény és a gyökfüggvény egymásnak inverzei, azaz tükrösek az **y=x** egyenesre.

Valamint, ha a dinamikus munkalapon mozgatjuk a csúszkán a kitevőnek megfelelő számot, akkor megkapjuk a többi hatványfüggvény és hozzá kapcsolódó gyökfüggvény grafikonját és hozzárendelési szabályát, amelyek szintén szimmetrikusak egymásra. Pl.: $\mathbf{x^3}$ és $\mathbf{\sqrt[3]{x}}$.

Megfigyelhető az is, hogy ha a kitevő páros, akkor páros függvényt -**y** tengelyre tükrös-, ha a kitevő páratlan, akkor páratlan -origóra szimmetrikus- függvényt kapunk.

A feladat megvalósításának első lépése a kitevő, mint változó felvétele a csúszkán. Fontos, hogy a kitevő értéke csak egész szám lehet, ezt a csúszka környezeti menüjében állítottam be. Majd a két függvény paraméteres egyenletét beírtam a parancssorba. Vagyis **x^a** és **x^(1/a)** utasításokkal kaptam meg a függvények grafikonját.

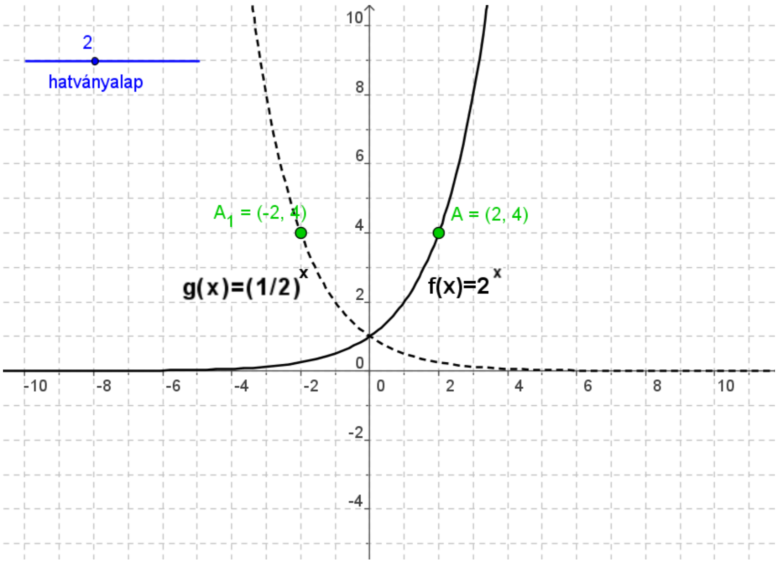
Apró hiba az ábrázolásnál, hogy a program a páratlan kitevőjű gyökfüggvényeknek csak az egyik felét rajzolja meg. (Ha ezen változtatni szeretnénk, akkor tükrözni kell a meglévő páratlan kitevőjű gyökfüggvény grafikonját az origóra. Ezt úgy lehetne megoldani, ha külön munkalapon ábrázolnám a páros és páratlan kitevőjű függvényeket.)

Ezzel a munkalappal mindenféleképpen az összefüggések bemutatása a célom, akárcsak a következő két munkalappal.

3.3.2. Exponenciális függvény

Ezzel a függvénnyel azért érdemes külön foglalkozni, mert a diákok hajlamosak összekeverni a hatványfüggvényt és az exponenciális függvényt. Sőt nem igazán értik, hogyan lehet könnyen megrajzolni pl.: $\mathbf{(1/2)^a}$ exponenciális függvényt.

A feladat megjelenítését a Munkalap12: exponenciális függvény dinamikus munkalapon illetve itt a **17. ábrán** láthatjuk.



17. ábra

A dinamikus munkalapon lehet változtatni az exponenciális függvény hatványalapját, azaz az **a** értékét. Ennek függvényében kapjuk az $\mathbf{a}^x$ és az $\mathbf{(1/a)}^x$ függvények grafikonját.

Jól látható a két függvény közötti összefüggés, vagyis hogy a két függvény szimmetrikus az **y** tengelyre. Mivel az **A** pont az $\mathbf{a}^x$ függvényen mozgatható, leolvashatók a függvényértékek. **A** pont tükörképe $\mathbf{A_1}$ pont, ami az **A** pont mozgatásának hatására az $\mathbf{(1/a)}^x$ függvényt futja be. Vagyis az $\mathbf{(1/a)}^x$ függvény ábrázolásánál segíthet a két mozgó pont koordinátái közti összefüggés.

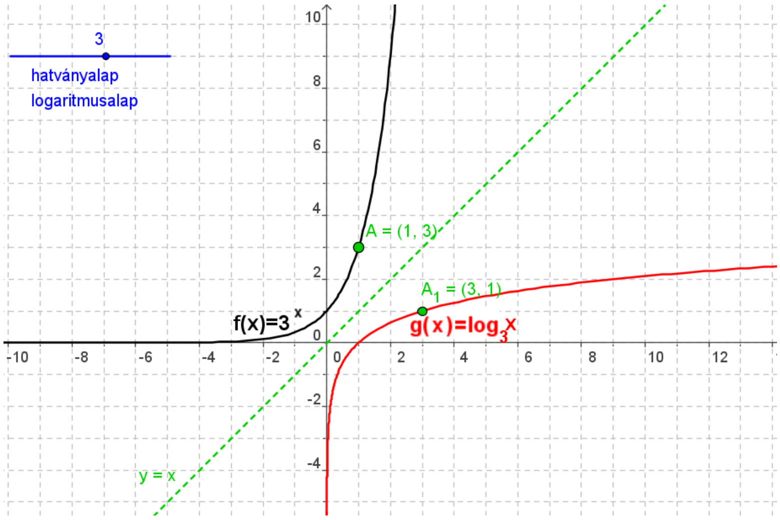
Továbbá bemutatható a függvényen a kitevő változásával az exponenciális függvény jellegzetessége, azaz hogy milyen rohamosan növekszik a függvény a hatványalap növekedésének hatására.

3.3. Logaritmusfüggvény

Az logaritmusfüggvényt érdemes az exponenciális függvénnyel párhuzamba állítani, ugyanis ezek inverz függvények. Ezért a következő munkalapon mindkét függvényt ábrázoltam, bemutatva a két függvény közötti összefüggést.

Tekintsük meg a melléklet Munkalap13: logaritmusfüggvény című oldalát, melynek rajzát a **18. ábra** mutatja.

Az ábra szerint a munkalapon változtatható az exponenciális függvény hatványalapja és ezzel párhuzamosan a logaritmus függvény alapja is. A beállított alap függvényében kapjuk a szóban forgó két függvény grafikonját.



18. ábra

A munkalapon és az ábrán látható az **y=x** egyenes, melyre a két függvény tengelyesen tükrös. Az **A** pont mozgatható az exponenciális függvényen és a neki megfelelő tükörkép, az $\mathbf{A_1}$ pont befutja a logaritmus függvényt. Észrevehető a két pont közti összefüggés: vagyis a pontok koordinátái felcserélődnek.

Az exponenciális függvény ábrázolása teljesen egyértelmű, csak a megfelelő parancsot kell a parancssorba írnunk: **a^x**. Viszont a logaritmus függvény ábrázolásánál figyelembe kell venni, hogy a GeoGebra program csak a természetes alapú logaritmust ismeri, ezért ha másmilyen alapú logaritmust szeretnénk ábrázolni, át kell írni a logaritmusos kifejezést. A parancssorba a következő utasítást írva, ábrázoltam a $\mathbf{log_a x}$ függvényt: **log(x)/log(a)**.

Összefoglalva, a középiskolában a függvények tanításban, tanulásban igen hasznos segítség lehet a GeoGebra program. Mint láttuk, az összes függvénytípust be lehet mutatni segítségével, sőt összetett függvényeket is könnyen lehet ábrázolni. Nagyon szép, szemléletes grafikonokat lehet készíteni, ami megkönnyíti a tanár és vele együtt a diákok munkáját. Használhatjuk a programot szemléltetésre, új anyag bemutatására, megértetésére, az összefüggések megvilágítására.

Továbbá a függvények ábrázolása sok helyen kiegészíti az egyenletek, egyenletrendszerek megoldását, éppen ezért az itt elkészült munkalapokat az egyenletek témakörnél is tudjuk majd hasznosítani.

4. Egyenletek, egyenlőtlenségek a GeoGebra-ban

Ha egyenleteket szeretnénk megoldani a GeoGebra program segítségével, akkor a program indítása után célszerű a függvények ábrázolásához hasonlóan, a geometria ablakban a **Tengelyek-**et és a **Rács-**ot is megjeleníteni. Viszont itt mindenféleképpen szükségünk lesz az **Algebra ablak-**ra, ezért azt is érdemes kiválasztani a **Nézet** menüben, ha nem látható.

Az egyenletek megoldása a függvények ábrázolásán alapszik. Ugyanis itt az egyenletek megoldását grafikus úton kapjuk meg. Ami azért szerencsés, mert más matematikai segédprogramok a megfelelő utasításra csak az egyenlet végeredményét adják meg. Itt viszont a végeredmény mellett az egyenlet grafikus megoldását is láthatjuk. Ezért itt párhuzamot tudunk felállítani a függvények és az egyenletek között, ami az oktatásban az integrációt is erősíti. Továbbá bizonyos egyenleteknél nem is lehet szétválasztani a függvényeket és az egyenleteket. Gondoljunk a másodfokú egyenletre, vagy a trigonometrikus egyenletekre, ahol a helyes megoldás érdekében is célszerű megrajzolnunk az egyenlethez tartozó függvényt.

Ebben a fejezetben bemutatom, hogy bármilyen típusú egyenletet meg tudunk oldani a GeoGebra-ban, és azt is leírom hogyan és mire tudjuk használni az elkészült munkalapokat. Ennél az anyagnál is a középiskolai matematika tananyag egyenlettípusait veszem sorra, évenként csoportosítva. A feladatokat itt is a sokszínű Matematika tankönyvcsalád könyveiből vettem.

4.1. Egyenletek a 9. évfolyamon

Ebben az évben a tanulók elsőfokú, törtes, abszolút értékes egyenleteket és egyenlőtlenségeket oldanak meg. Itt ismerkednek meg az egyenletrendszerrel is. Mindegyik egyenletnél követelmény az algebrai és a grafikus megoldás is.

Vegyük sorra ezeket az egyenlettípusokat. A feladatok megoldásait, a melléklet **Egyenletek, egyenlőtlenségek** fejezete tartalmazza, évenkénti csoportosításban.

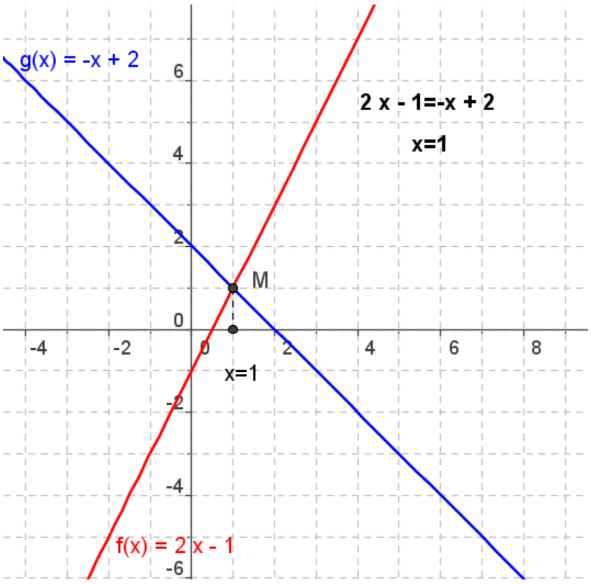
4.1.1. Elsőfokú egyenlet

Ha egy elsőfokú egyenletnek csak a megoldására vagyunk kíváncsiak, akkor megtehetjük, hogy egyszerűen beírjuk a parancssorba az egyenlet egyenletét. Ilyenkor a megoldás az algebra alakban jelenik meg, de nem **x** változóval, hanem pl.: **a=1** alakban. Ezt a megoldási módszert nem ajánlom.

A következő munkalapot viszont érdemes megnézni. Tekintsük meg a melléklet **9. évfolyamának** Munkalap14: elsőfokú egyenlet című dinamikus oldalát, amely egy elsőfokú egyenlet grafikus megoldását mutatja. A feladatot a 9.-es tankönyvből vettem, és itt a feladat szerint, az egyenletet grafikusan kell megoldani.
A munkalap geometriai ablakáról készült kép a **19. ábrán** látható.

151. old. / 6.b

A munkalapon egy-egy függvény jelöli az egyenlet bal és jobb oldalán álló kifejezést. Az egyenlet megoldását az **M** pont **x** koordinátája adja. Mindkét függvény a rajzlapon mozgatható, és ezek függvényében kapjuk másik elsőfokú egyenletek megoldását. Az **x** értékét akkor is megtudjuk, ha a két egyenes metszéspontja nem fér rá a rajzlapra.



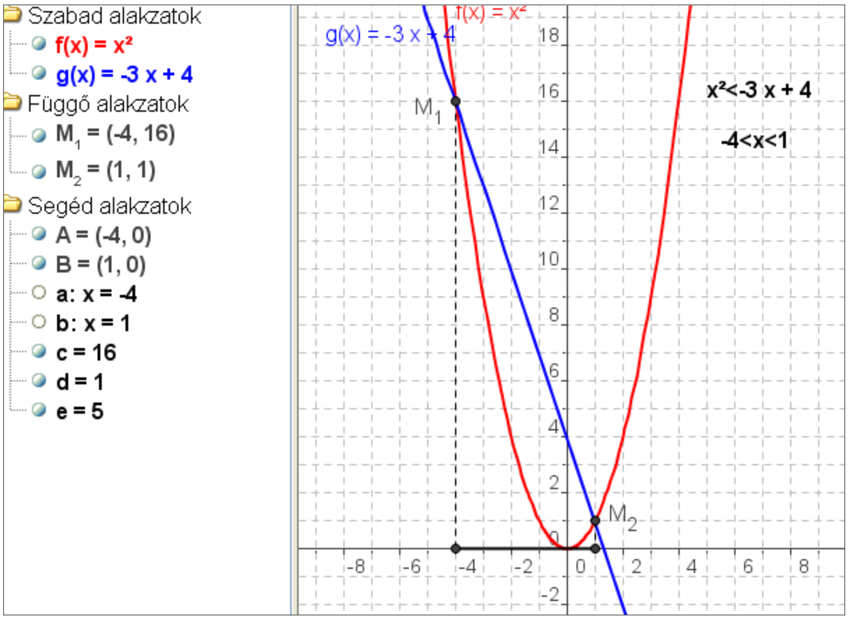
19. ábra

A feladat megoldása nagyon egyszerű, a parancssorba beírtam a **2x-1** és **–x+2** függvények szabályát, majd kijelöltem a metszéspontjukat a szokásos módon. Az **M** metszéspontból pedig az egyenlet alatt csak az **x** koordinátát jelenítettem meg az **x(M)** paranccsal.

Igaz a grafikus megoldás nem helyettesíti az egyenlet algebrai megoldását, de azt mindenféleképpen kiegészíti. Ezért a feladatot szemléltetésre, példák ellenőrzésére ajánlom.

4.1.2. Egyenlőtlenség

Az egyenlőtlenséget is megoldhatjuk grafikus úton, sőt ebben az évben sok olyan feladat van, amit csakis grafikusan lehet megoldani. Ilyen a következő tankönyvi példa is, ugyanis ebben a tanévben a diákok nem tudnak másodfokú egyenleteket megoldó képlettel megoldani.
A bemutatandó feladat a szóban forgó melléklet Munkalap15: egyenlőtlenség címe alatt található. A munkalap képe az algebrai ablakkal együtt pedig a **20. ábrán** látható.

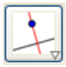


20. ábra

169. old. / 1.c

A munkalapon és az ábrán az egyenlőtlenség grafikus megoldását látjuk. A munkalapon mindkét függvény mozgatható, és ezek változásával változik a megoldás is.
Amennyiben nincs megoldás, akkor az eredmény nem definiált.

A megoldásban a függvények ábrázolása és a metszéspontok kijelölése után, határoztam az egyenlőtlenség megoldáshalmazát.
Ehhez néhány **Segéd alakzatot** kellett felvennem. Az algebra ablakban látható **A** és **B** pontok az M_1 és M_2 pontok merőleges vetületei az **x** tengelyen.

A merőlegest egy külső pontból adott egyenesre az eszközsor  merőleges ikonjával tudunk rajzolni. Miután kiválasztjuk az ikont, utána kijelöljük a pontot, majd az egyenest. Igaz ez a két merőleges a rajzlapon nem látható, az algebra ablakban leolvasható a **Segéd alakzatok** között **a:x=-4** és **b:x=1**. Az ábrán csak az AM_1 és BM_2 szakaszok láthatók, melyeket az eszközsor  ikonjával tudunk létrehozni, vagy a **szakasz[A pont, B pont]** paranccsal. Ugyanilyen módon jelöltem ki az **AB** szakaszt is, amelyet vastagvonallal ábrázoltam, ugyanis ez adja a megoldás intervallumát. Végül az egyenlőtlenség megoldásánál a metszéspontok **x** koordinátáját jelenítettem meg.

Ez a munkalap is leginkább az egyenlőtlenség megoldásának szemléltetését szolgálja. Továbbá ezen az oldalon is be lehet mutatni, hogy az elsőfokú kifejezéshez tartozik a lineáris függvény, míg a másodfokú kifejezéshez pedig a parabola.

4.1.3. Abszolút értéket tartalmazó egyenlet

Ennél a feladattípusnál is könnyebb a diákoknak az ilyen egyenleteket grafikusan megoldani, mint algebrai úton esetszétválasztással megkeresni a megoldásokat.

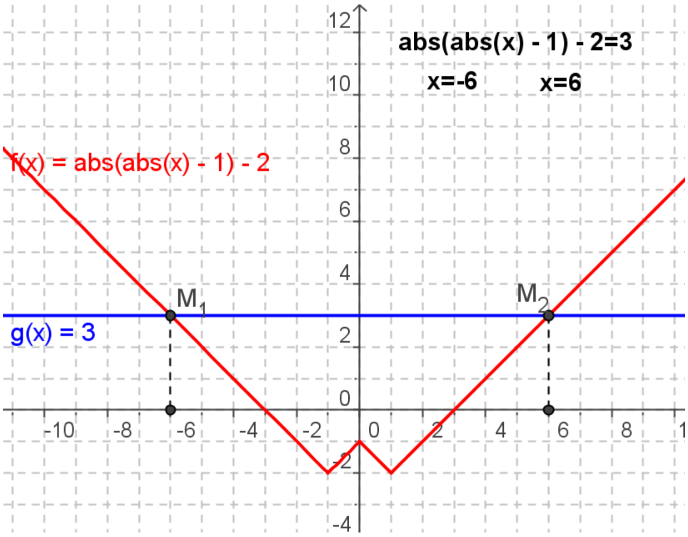
Éppen ezért a kétféle megoldási módot nem választanám külön, hanem a legtöbb példánál mindkét módszert alkalmaznám. Tenném ezt azért is, mert az abszolút értékes egyenletnek általában több megoldása is van, és a diákok hajlamosak erről megfeledkezni.

A melléklet Munkalap16: abszolút értékes egyenlet oldala alatt található egy konkrét feladat megoldása, melynek rajzlapját a **21. ábrán** láthatjuk.

175. old. / 4.c.

A konkrét egyenlet grafikus megoldását látjuk az ábrán és a hozzá tartozó munkalapon.

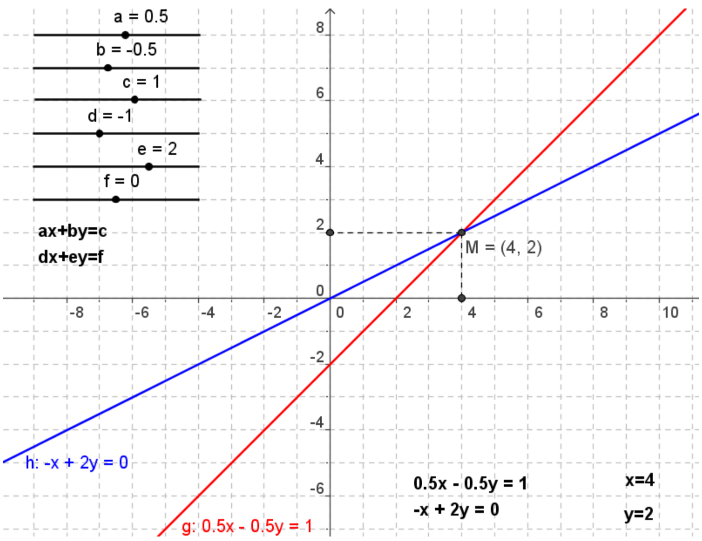
A dinamikus oldalon a függvények itt is mozgathatók és az algebra ablakban leolvashatók a metszéspontok M_1, M_2, M_3, M_4 koordinátái. Jelen helyzetben M_3, M_4 nem definiált.



21. ábra

4.1.4. Egyenletrendszer

A következő munkalap egy általános lineáris egyenletrendszer megoldását szolgálja. A munkalapot a melléklet Munkalap17: egyenletrendszer oldala alatt találjuk. A rajzlap képét a **22. ábra** mutatja.



22. ábra

191. old. /1.b.

Az ábrán bemutatott példa, konkrét tankönyvi feladat.

De a munkalap segítségével, bármilyen elsőfokú egyenletrendszert meg tudunk oldani, mely az általános alakban adott.

Ugyanis az egyenletrendszer együtthatói: **a, b, c, d, e, f** a csúszkán változtathatók.

Amennyiben nem látható a két egyenes metszéspontja, a megoldást akkor is le tudjuk olvasni. Amennyiben nincs megoldása az egyenletrendszernek, akkor pedig a nem definiált kifejezés olvasható **x** és **y** értéke mellett.

A feladat megoldása során a paraméterek felvétele után, az egyenletrendszer egyenleteit kellett ábrázolni. Ezért a parancssorba az egyenesek paraméteres egyenletét írtam: **g:a*x+b*y=c** és **h:d*x+e*y=f** . Majd a két egyenes metszéspontjának mindkét koordinátáját **x** és **y** értékét kiírattam a rajzlapra.

A feladat jelentőségét abban látom, hogy segítségével bármilyen általános alakban megadott egyenletrendszert könnyen és gyorsan meg tudunk oldani. Éppen ezért a munkalapot a szemléltetés mellett ajánlom egyenletrendszerek megoldására, feladatok ellenőrzésére tanárok és diákok számára.

4.2. Egyenletek a 10. évfolyamon

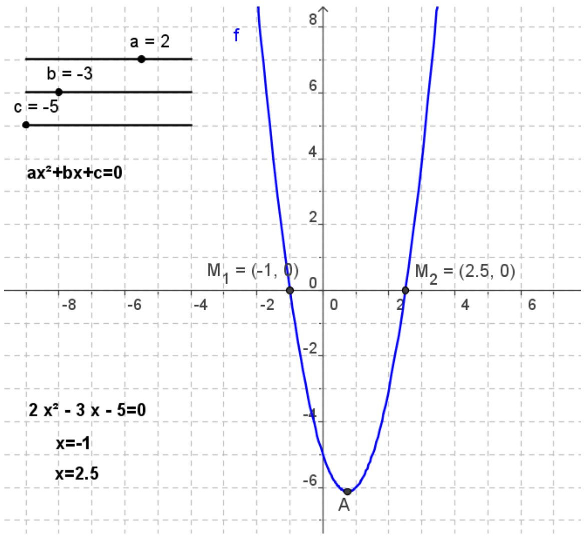
Ebben a tanévben a másodfokú, néhány magasabb fokú és négyzetgyökös egyenlet és egyenlőtlenség képezi a törzsanyagot. Mindegyik egyenlettípusnál sikeresen tudjuk használni a programot. A témakörhöz kapcsolódó munkalapok a melléklet **Egyenletek, egyenlőtlenségek** fejezetének, **10. évfolyam** részében találhatók.

4.2.1. Másodfokú egyenlet

A másodfokú egyenletnél, mint már említettem nem lehet szétválasztani az egyenletet és a függvényt. Fontos, hogy a diákokban tudatosodjon, a másodfokú függvény és a parabola közti összefüggés.

Tekintsük a melléklet Munkalap18: másodfokú egyenlet című dinamikus oldalát, illetve a **23. ábrát**.

A munkalap segítségével, bármilyen **$ax^2+bx+c=0$** általános alakban megadott egyenlet megoldható. Ugyanis a dinamikus oldalon az **a**, **b**, **c** paraméterek változtathatók és ezek függvényében kapjuk a másodfokú egyenlet megoldásait.



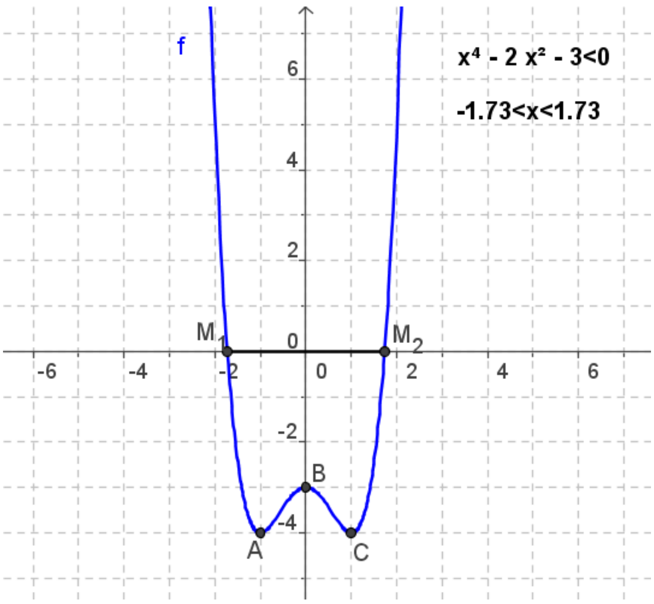
23. ábra

A feladat megoldása nem tartalmaz sok újdonságot. Viszont segítségével nemcsak az egyenlet gyökeit kapjuk meg, hanem fontos összefüggések figyelhetők meg az ábra segítségével. Például felhívhatjuk a diákok figyelmét arra, hogy az egyenletnek mikor van 2, 1 és 0 megoldása, a parabola elhelyezkedésétől függően. Be tudjuk mutatni, hogy ha az **a** paraméter értékétől függően **a**>0, akkor a parabola felfelé, ha **a**<0, akkor pedig lefelé fordul. Azt is be tudjuk mutatni, hogy az egyenlet gyökei, a parabola zérushelyei lesznek.

Mivel ez a munkalap fontos összefüggésekre is rávilágít, használhatjuk az új anyag tanításában. Segítségünkre lehet a gyakorló példák megoldása során szemléltetésre, ellenőrzésre.

4.2.2. Magasabb fokú egyenlőtlenség

Az ilyen típusú feladatok megoldást is szemléltethetjük grafikusan, de a diákok az ilyen egyenleteket csak algebrai módszerrel, például helyettesítéssel tudják megoldani. Egy ilyen 10.-es tankönyvi feladat bemutatása látható a Munkalap19: magasabb fokú egyenlőtlenség oldalán és itt a **24. ábrán**.



24. ábra

81. old. / 4.b.

Az munkalapon és az ábrán a konkrét feladat megoldását látjuk. A függvény maga fix alakzat, nem mozgatható.

A munkalap tartalmazza továbbá a függvény három szélsőértékét **A**, **B**, **C,** melyek koordinátáit az algebra ablakban tudunk leolvasni.

A feladat megoldása során az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezést, mint függvényt ábrázoltam. Majd az előző részben tárgyalt módon kiírattam a rajzlapra az egyenlőtlenség megoldásait, amely egy intervallum. A polinom függvény szélsőértékeit pedig a **szélsőérték[f]** paranccsal lehet megjeleníteni.

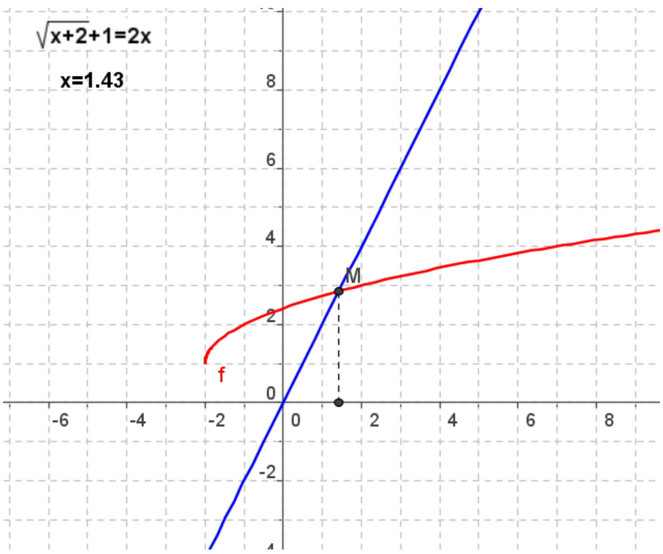
A munkalapot azért tartom fontosnak bemutatni a diákoknak, hogy lássák milyen egy magasabb fokszámú (negyedfokú) függvény. Szemléltetni lehet vele, hogy egy ilyen függvénynek egynél több zérus helye, több szélsőértéke, az egyenletnek pedig több megoldása is lehet.

4.2.3. Négyzetgyökös egyenlet

93. old. / 2.b.

A négyzetgyökös egyenlet grafikus megoldását a Munkalap20: négyzetgyökös egyenlet oldala mutatja. A munkalap geometriai ablakát pedig a **25. ábrán** láthatjuk.

Az ábra szerinti két függvény metszéspontja adja a konkrét feladat megoldását. Itt a függvények nem mozgathatók.



25. ábra

4.3. Egyenletek a 11. évfolyamon

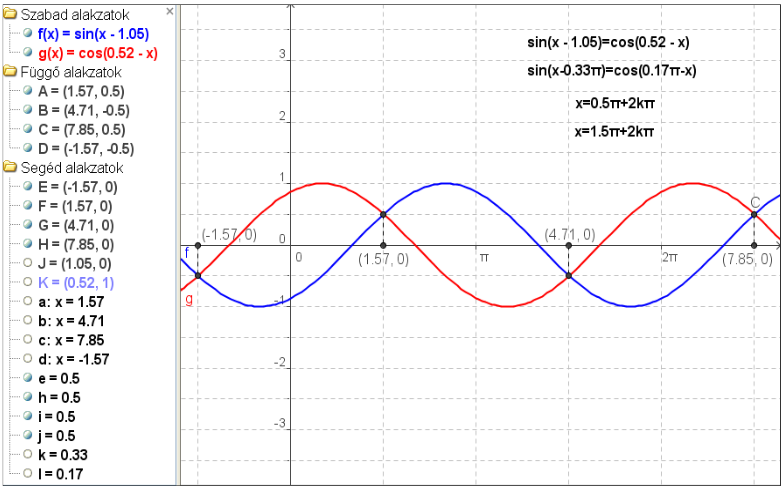
Ebben az évben a trigonometrikus, exponenciális és logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek megoldását tanítjuk. Mindegyik feladattípusnál fontos az egyenletek grafikus megoldása, de a trigonometrikus egyenleteknél szinte minden feladatnál elengedhetetlen.

Ezeknek a feladatoknak a megoldását a melléklet **Egyenletek, egyenlőtlenségek** fejezetének **11. évfolyam** részében találjuk.

4.3.1. Trigonometrikus egyenlet és egyenlőtlenség

A következő, Munkalap21: trigonometrikus egyenlet és egyenlőtlenség oldal két különböző munkalapot tartalmaz. Mindkét feladat a 11.-es tankönyvben található, az egyik egy trigonometrikus egyenlet, a másik egy egyenlőtlenség megoldását szemlélteti.

162. old. /2.b.



26. ábra

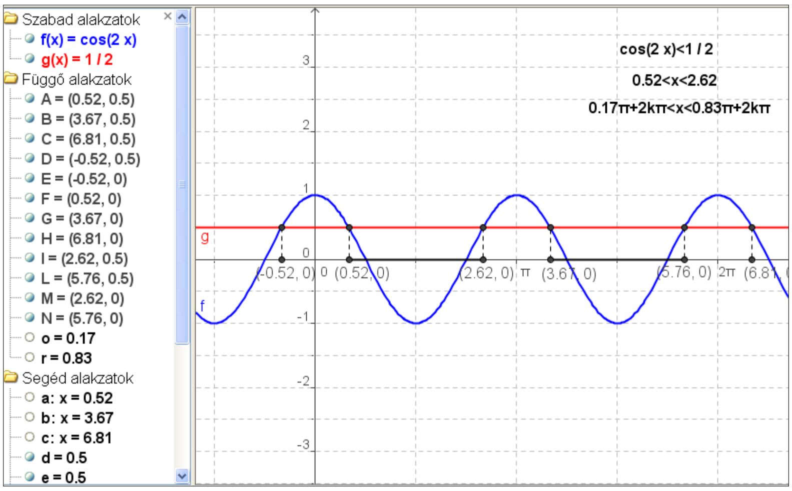
A **26. ábrán** látható az egyenletről készült munkalap másolata.

A rajzlapról leolvasható az egyenlet és annak megoldásai. A szinusz és koszinusz függvények mozgathatók és így változnak az egyenlet megoldásai.

162. old. /6.b.

A **27. ábra** a trigonometrikus egyenlőtlenség megoldását mutatja. A rajzlapról leolvasható az egyenlőtlenség és a megoldása.

A lineáris függvény itt is mozgatható, hatására változik az egyenlőtlenség megoldás is.



27. ábra

Mindkét feladat megoldása sok lépésből állt, amit az algebra ablakban található adatok is mutatnak. A megvalósításban a bonyodalmat a sok metszéspont és a radiánban történő értékek átszámítása okozta.

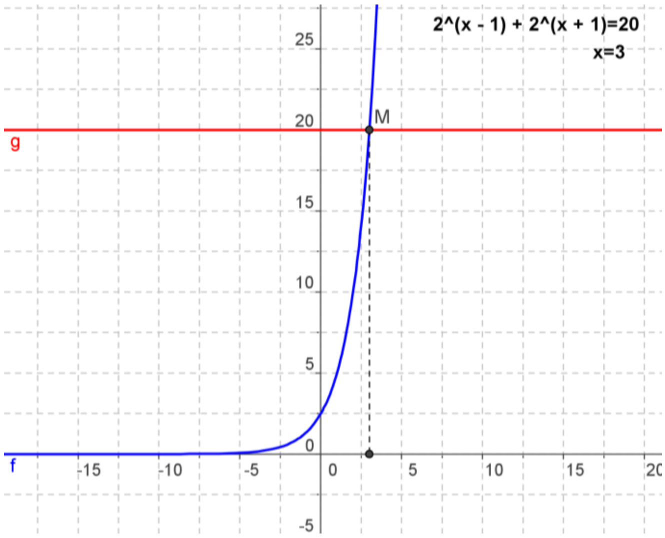
A munkalap jelentősége abban van hogy segítségével sok, hasonló típusú feladat szemléltethető és megoldható. A dinamikus oldal órán történő kivetítésével be tudjuk mutatni, a trigonometrikus függvények és egyenletek kapcsolatát. Láttatni tudjuk a trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásának periódusát, a különböző megoldások számát.

4.3.2. Exponenciális egyenlet

91. old. / 1.g.

A konkrét feladatot és annak grafikus megoldását a melléklet Munkalap22: exponenciális egyenlet dinamikus lapja mutatja. A rajzlapról készült képet pedig, a **28. ábrán** láthatjuk.

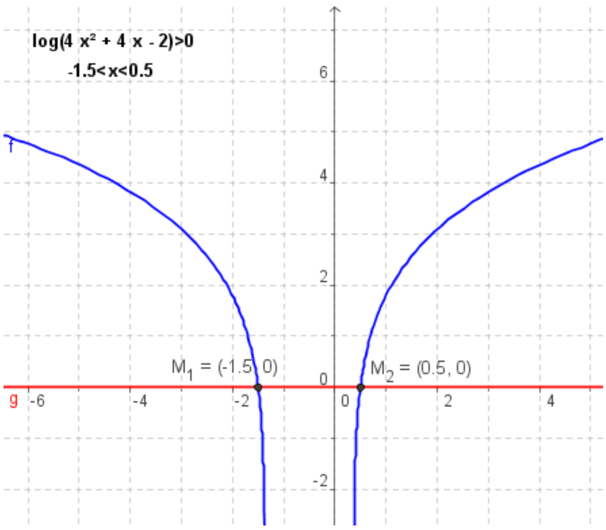
Az lineáris függvény mozgatható a munkalapon, változását az egyenlet megoldása is követi.



28. ábra

4.3.3. Logaritmusos egyenlőtlenség

114. old. / 3.d.



29. ábra

A tankönyvi feladat megoldását megtekinthetjük a melléklet Munkalap23: logaritmusos egyenlőtlenség oldalán.

Az egyenlőtlenséget és annak megoldását láthatjuk a **29. ábrán**.

Ezt a feladatot csak a feladat ellenőrzésére ajánlom, ugyanis az ábrázolandó függvény összetett, középiskolásoknak viszonylag nehéz.

Összefoglalva, az egyenletek, egyenlőtlenségek témakörben is nagy segítség lehet a GeoGebra. Láthattuk, hogy viszonylag egyszerűen tudunk a program segítségével egyenleteket megoldani. Megkönnyíthetjük a számításokat, szemléltetni tudunk grafikus megoldásokat, és rá tudunk világítani a függvények és egyenletek közti összefüggésekre. Éppen ezért használhatják tanárok, tanulók egyaránt az egyenletek megoldására és ellenőrzésére is.

5. Síkgeometria a GeoGebra-ban

Amennyiben geometriai feladatokat szeretnénk megoldani a GeoGebra-ban, akkor a program indítása után a geometria ablakban nem kellenek a **Tengelyek** és a **Rács**. Sőt a legtöbb feladatnál az **Algebra ablak**ra sem lesz szükségünk, ezért ezeket a **Nézet** menüben állítsuk be.

A geometriai feladatok megoldásában is igen sokrétűen használhatjuk a GeoGebra programot. Alkalmazhatjuk geometriai szerkesztések bemutatására, ahol a szerkesztés lépéseit visszajátszhatjuk, használhatjuk bizonyítási feladatok szemléltetésére, és geometriai számítások elvégzésére is. Használhatjuk a programot általánosan az új anyag bemutatásánál és természetesen konkrét faladatok megoldásánál is. Ezekre mutatok példát, sorba véve a középiskolai geometria tananyag legfontosabb anyagrészeit. A feladatokat a sokszínű Matematika 9-es és 10-es tankönyveiből veszem és a megoldásokat a melléklet **Síkgeometria** fejezete tartalmazza.

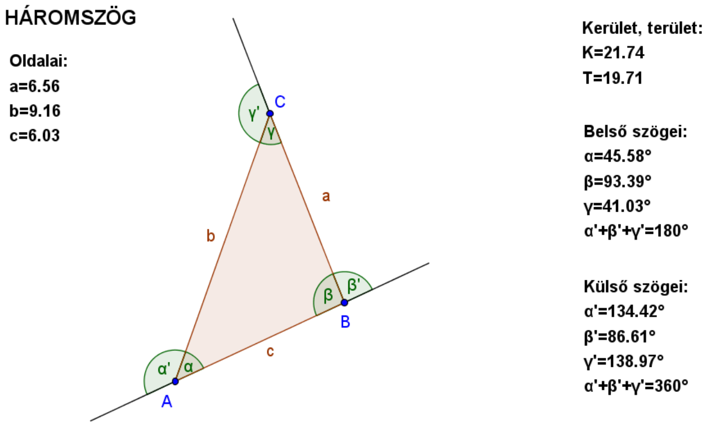
5.1. Síkgeometria a 9. évfolyamon

Ebben a tanévben a háromszögek, négyszögek és sokszögek legfontosabb tulajdonságaival foglalkozunk a tanórákon. Valamint előfordulnak ponthalmazokkal kapcsolatos egyszerű feladatok. Nézzük sorban ezeket.

5.1.1. Háromszögek

A háromszögek legfontosabb jellemzőit a melléklet **Síkgeometria 9. évfolyam** Munkalap24: háromszög oldala mutatja, a képét pedig az alábbi **30. ábra** szemlélteti.

A munkalapon egy általános háromszög látható, a szokásos jelölésekkel. A háromszög csúcsai mozgathatók és ezek függvényében kapjuk a háromszög adatait: oldalainak hosszát, belső és külső szögeinek nagyságát, valamint a háromszög kerületét, területét.



30. ábra

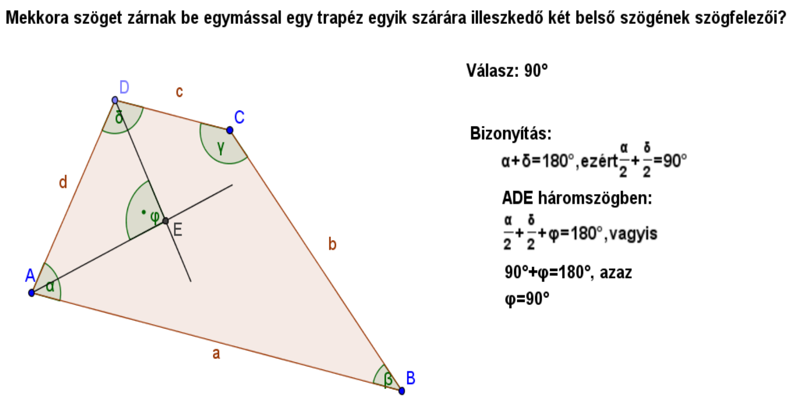
A megvalósítás során a GeoGebra néhány új parancsát illetve ikonját használtam.

A háromszöget legegyszerűbben sokszög ikonnal rajzoltam meg, miközben kijelöltem a rajzlapon a háromszög csúcsait. De megtehetjük azt is, hogy először felvesszük a háromszög csúcsait a geometria ablakban, majd a **sokszög[A, B, C]** parancsot használjuk a háromszög megrajzolásához. Mindkét esetben a program automatikusan elnevezi a sokszöget, esetünkben a háromszöget és az algebra ablakban megadja a háromszög oldalainak hosszát és a területét is. A kerület kiszámítását a szokásos módon a parancssorba beírt közvetlen utasítással oldottam meg: **K=a+b+c.**
A háromszög belső szögeit, a legegyszerűbb módon a **szög[T sokszög]** paranccsal lehet meghatározni. Ilyenkor a program egyből elnevezi a háromszög szögeit és értéküket megadja az algebra ablakban.

Természetesen megtehetjük, hogy a szögeket egyesével kijelöljük a szög ikonnal, majd megadjuk a szöget alkotó három csúcspontot a megfelelő körüljárási irány szerint. Ilyen módon határoztam meg az ábrán látható külső szögeket is, amelyeket természetesen át kellett nevezni.
A feladat áttekinthetőségének érdekében az algebra ablakban szereplő fontos adatokat a szokásos módon kiírattam a rajzlapra is.
Ez a munkalap jó példa arra, hogy milyen egyszerűen tudunk a GeoGebra-ban geometriai alakzatokat megjeleníteni az eszközsor ikonjainak segítségével és milyen egyszerűen tudjuk meghatározni a geometriai alakzatok jellemzőit.

5.1.2. Négyszögek

A háromszögekhez hasonlóan általános négyszögeket is könnyen tudunk rajzolni a program segítségével és egyszerűen meg tudjuk határozni a jellemzőit is.
Nehezebb feladat, ha egy speciális négyszöget, például trapézt szeretnénk szerkeszteni. Ennek megvalósítására mutatok példát a következő konkrét tankönyvi feladat kapcsán.
A feladat a 9.-es tankönyvben található **136. old. /1.**
Feladat: Mekkora szöget zárnak be egymással egy trapéz egyik szárára illeszkedő belső szögének szögfelezői?
A megoldást a szóban forgó melléklet Munkalap25: négyszög-trapéz dinamikus oldala tartalmazza, és a feladathoz tartozó **31. ábra** a munkalap képét mutatja.

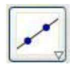


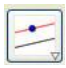
31. ábra

A munkalapon a feladat szövege és bizonyítása is látható. Az ábra a feladat megoldását szemlélteti, miszerint az átlók 90°-os szöget zárnak be.

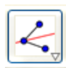
Ha a csúcsokat mozgatjuk a rajzlapon akkor is merőlegesek lesznek egymásra a szögfelezők.

A feladat megoldásában a trapéz szerkesztése okozta a nehézséget. Ugyanis nem tehetjük meg, hogy tetszőlegesen rajzolunk négy pontot, amik trapézt alkotnak, hiszen a pontok mozgatásával már nem biztos, hogy trapézt kapunk.

Éppen ezért csak három pontot: **A**, **B**, és **C** pontot vettem fel **Szabad alakzat**nak, és az **A** és **B** pontokra illesztettem egy **e** egyenest. Egyenest az eszközsor  egyenes ikonjával hoztam létre, de az **egyenes[A, B]** paranccsal is megtehettem volna.

Majd a **C** ponton keresztül párhuzamost húztam az előbbi **e** egyenessel, kaptam **f** egyenest. Párhuzamost az eszközsor  párhuzamos ikonjával szerkesztettem, ahol először az **e** egyenest, majd a **C** pontot kell megadni. Végül pedig a **D** pontot az **f** egyenesre illesztettem. Ezt a legegyszerűbben az egyenesen történő kijelöléssel tehetjük meg, de **pont[f]** paranccsal is megoldhatjuk.

Természetesen a két párhuzamos egyenes **e** és **f** a trapéz alapjait tartalmazzák és az ábrán nem láthatók, vagyis **Segéd alakzatok**. Ezek után rajzoltam meg a négyszöget, a háromszögnél megismert módon, az **A**, **B**, **C** és **D** pontokra illesztve.

Következő lépés a szögfelezők megszerkesztése, melyet a  szögfelező ikonnal rajzoltam meg, de használhattam volna a **szögfelező[B,A,D]** vagy a **szögfelező[a,d]** parancsot is.

Az átlók metszéspontját és szögét pedig a már megismert módon akár parancs, akár a megfelelő ikon segítségével meghatározhatjuk. A program automatikusan jelöli meg a derékszöget az ábrán látható módon.

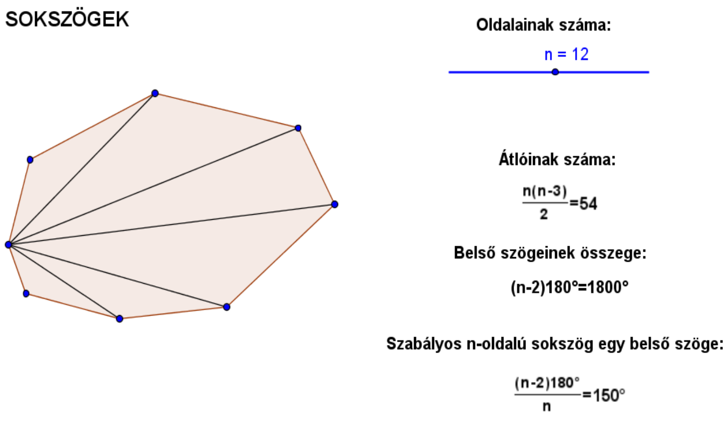
Mivel a szerkesztés önmagában nem bizonyítás, ezért a bizonyítás lépéseit a rajzlapon meg is jelenítettem. Így az ábra és a mellette lévő bizonyítás alkalmas a tanórán történő bemutatásra. A trapéz pontjainak mozgatásával pedig megmutatjuk a tanulóknak, hogy ez az állítás tetszőleges trapézra is igaz

A munkalap kapcsán a geometriai szerkesztést és bizonyítást is be lehet mutatni, és e kettőt párhuzamba állítani. Továbbá ennek a feladatnak a megoldása is nagyon jól szemlélteti, a program sokoldalúságát, azt hogy egy feladatot többféleképpen is meg tudunk valósítani.

5.1.3. Sokszögek

A háromszögek és négyszögek után a tananyagban a sokszögek következnek. A sokszögekkel kapcsolatos geometriai számítási feladatokat is megoldhatunk a GeoGebra segítségével. Erre mutatok példát a melléklet Munkalap26: sokszögek oldalán, melynek rajza az alábbi **32. ábrán** látható.

A munkalapon a sokszög oldalainak **n** száma a csúszkán változtatható és ennek függvényében kapjuk meg az **n** oldalú sokszög átlóinak számát, belső szögeinek nagyságát, valamint a szabályos **n**-szög egy belső szögének nagyságát.



32. ábra

A megoldásban az ábrán látható sokszög szimbolikus, egyszerűen a sokszög paranccsal rajzoltam meg. A feladat lényege a geometriai számításokban rejlik, melyeket a parancssorba írt paraméteres utasítással oldottam meg.

Pl.: **n*(n-3)/2** .

Ez a munkalap leginkább a konkrét számítási feladatok gyors ellenőrzésére alkalmas. Jól mutatja, hogy a programmal geometriai számításokat is végezhetünk, megkönnyítve a munkánkat.

5.1.4. Ponthalmazok

Az előbbi feladatok kapcsán már találkoztunk ponthalmazokkal. A most következő feladatban viszont egy adott tulajdonságú ponthalmazt kell megszerkeszteni és a feladat megoldása során is több ponthalmazt használunk (szögfelező, párhuzamos, merőleges…).

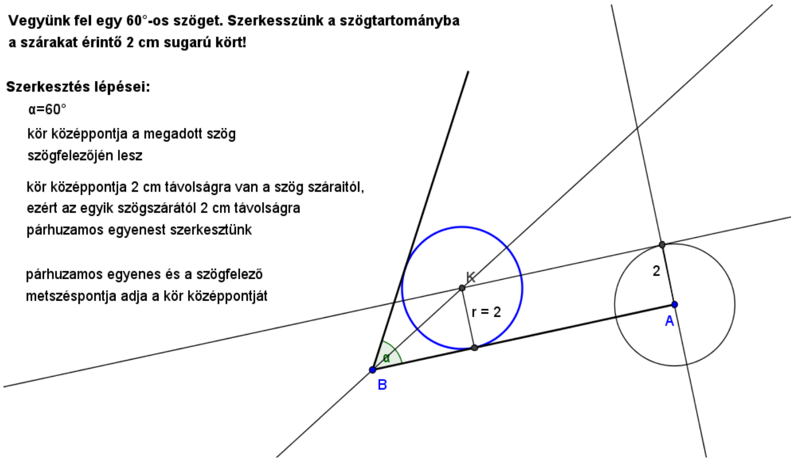
A feladat a 9.-es tankönyvben található, **136. old. / 5.**

Feladat: Vegyünk fel egy 60°-os szöget. Szerkesszünk a szögtartományba, a szárakat érintő 2 cm sugarú kört!

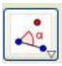
A Munkalap27: ponthalmazok oldalon látható a feladat és annak megoldása. Valamint az oldalról készült kép a **33. ábrán** is látható.

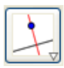
Az oldalon látható a szerkesztés vázlata és menete.

Ha a **Navigációs eszköztáron** lévő **Lejátszás** gombra kattintunk, akkor megnézhető a szerkesztés lépésenként is.



33. ábra

A szerkesztés kivitelezése sok lépésből állt. Először felvettem az **A** és **B** pontokat, majd erre szerkesztettem egy 60°-os szöget az eszköztár  szög adott mérettel ikonjával. Az ikon kiválasztása után kijelöltem az **A** és **B** pontokat, majd a megjelenő ablakba megadtam a 60°-os szöget és a körüljárás irányát.

Egyrészt a kör középpontja az adott szög szögfelezőjén van, ezért megszerkesztettem a 60°-os szög szögfelezőjét. Másrészt a kör középpontjának és a szögszárnak a távolsága 2 cm, így a szögszárral 2 cm távolságra párhuzamost szerkesztettem. Ennek módja, hogy először merőlegest állítottam a szögszár **A** pontjába a  merőleges ikonnal. Majd A pontból rajzoltam egy 2 cm sugarú kört a  kör középponttal és sugárral ikonjával és kijelöltem a merőleges és a kör metszéspontját. Ekkor a metszéspontba kellett egy a szögszárral párhuzamos egyenest szerkeszteni.

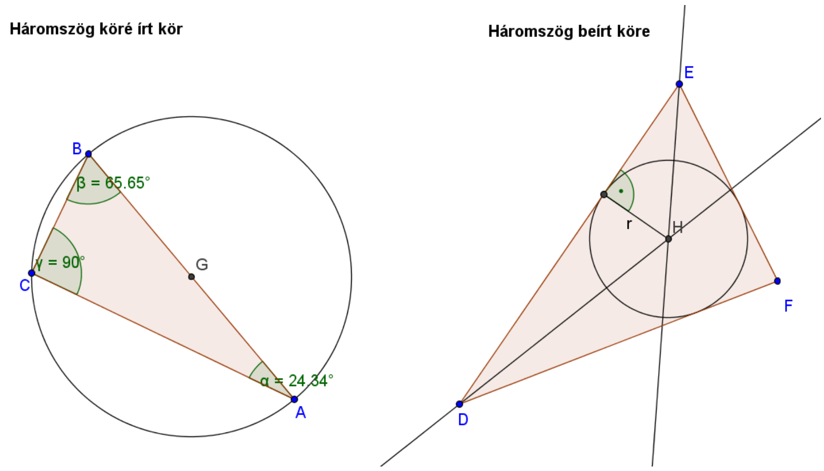
A párhuzamos egyenes és a szög szögfelezőjének a metszéspontja adja a kör középpontját, amit szintén a kör középponttal és sugárral ikonjával megrajzoltam.
Megjegyzem, hogy a kört meg lehet a **kör[K,r]** paranccsal is rajzolni, ahol **K** a kör középpontja, **r** pedig a sugara.
A szerkesztés nem minden lépése látható az ábrán, ugyanis ez az ábra áttekinthetőségét befolyásolná. Viszont a **Navigációs eszköztáron** a **Szerkesztő protokoll** gombján a nem látható szerkesztési lépéseket is meg tudjuk nézni.

Ezzel a feladattal igen jól tudjuk szemléltetni a bonyolultabb szerkesztéseket is. Megtehetjük, hogy a tanórán lépésenként végig megyünk a szerkesztés menetén, a **Navigációs eszköztáron** lépegetve, de akár többször is lejátszhatjuk az egész szerkesztést, a **Lejátszás** gomb segítségével. Tudjuk szabályozni a tanulók képessége szerint a lejátszás sebességét is. Pl. 2-3 másodperc lépésenként.
A munkalapon is látható, hogy szép és igényes szerkesztést tudunk készíteni, melyeket a tanórákon be tudunk mutatni a tanulóknak, megkönnyítve számukra a megértést és természetesen a mi munkánkat is.

5.1.5. A háromszög körülírt és beírt köre

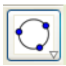
A ponthalmazok egyik csoportját alkotják a háromszög körülírt és beírt köre. A következő két munkalap, a melléklet Munkalap28: háromszög körülírt és beírt köre című oldala erre mutat példát. Az oldalon található első munkalapnak a rajzát a **34. ábrán** is láthatjuk.

A munkalapon az **ABC** háromszög és a **EDF** háromszög csúcsai is mozgathatók.
A csúcspontok változtatásának hatására változik a köré írt és a beírt kör középpontja és a kör maga is.



34. ábra

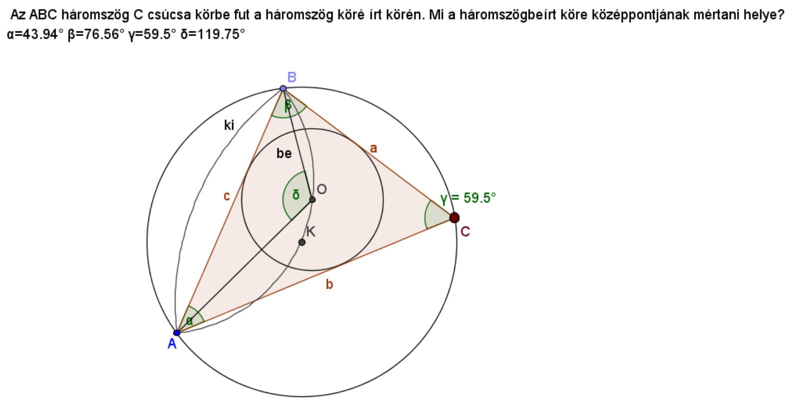
Az **ABC** háromszög csúcsainak mozgatásával jól szemléltethető, hogy hol helyezkedik el a háromszög köré írt kör középpontja. Mivel a háromszög szögei az ábrán és a rajzlapon láthatóak, így az összefüggés világos: hegyesszögű háromszög esetén belül, derékszögű háromszög esetén az átfogón, tompaszögű háromszög esetén a háromszögön kívül van a középpont.

A feladat kivitelezése egyszerű volt. A köré írt kör megszerkesztése egy ikon segítségével történt. Az eszközsor  köré írt kör ikonjának kiválasztása után meg kellett adnom a már megrajzolt háromszög csúcspontjait. De hasonlóan egyszerű megoldás lenne a **kör[A,B,C]** parancs, ami szintén a köré írt kört adja.

A beírható kör megszerkesztése esetén a hagyományos szerkesztés lépéseit kellett végrehajtani. Vagyis a beírható körhöz megszerkesztettem a háromszög két szögfelezőjét, melyek metszéspontja a beírt kör középpontja. A középpontból valamelyik oldalra bocsátott merőleges kimetszi az oldalon a körvonal egy tetszőleges pontját. Ezeket a szerkesztési lépéseket a már ismert módon végrehajtottam, majd végül a kört  kör középponttal és kerületi ponttal ikonjával megrajzoltam.

Az oldalon látható másik munkalap [2] a háromszög beírt és körülírt köre közötti összefüggést szemlélteti, a munkalapról készült képet az alábbi, **35. ábra** mutatja.

Feladat: Az **ABC** háromszög **C** csúcsa körbe fut a háromszög köré írt körén.
Mi a háromszögbe írt kör középpontjának mértani helye?



35. ábra

A munkalapon A **C** pont a körülírt körön mozgatható és a mozgatásával megfigyelhető, hol helyezkednek el a beírt kör középpontjai. A feladat megoldását az ábrán berajzolt szögek segítik.

[2] A munkalap Papp-Varga Zsuzsa munkája

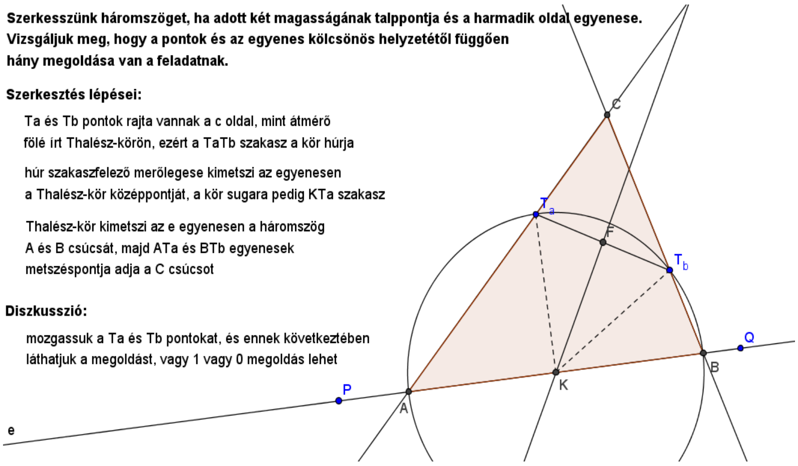
Megoldás: A beírt kör középpontjai az **AB** szakasz **δ** szögű látókörén helyezkednek el. Mivel **δ** a háromszög szögfelezőiből alkotott szög, ezért **$\delta=180°-(\alpha/2+\beta/2)$**. Egyenletrendezés után **$\delta=90°+\gamma/2$,** azaz **δ** értéke csak **γ** szög nagyságától függ.
Amennyiben mozgatjuk a háromszög **B** csúcsát, akkor változik a **γ** és természetesen a **δ** szög is.
A feladat elkészítése hasonló az előző munkalaphoz. Egy újabb lépést tartalmaz, melyet érdemes kiemelni, ez pedig a mértani hely meghatározása. Miután meg lett szerkesztve a háromszög köré írt majd beírt köre az előbb vázolt módon, utána a  mértani hely ikonjának kiválasztása következett, majd az **C** és **O** pontok kijelölése. Ennek hatására rajzolja ki a program az **O** pont által befutott látókört. A mértani helyet a **mértani hely[C,O]** parancs segítségével is meg lehet rajzolni.
A szerkesztés menetét itt is megnézhetjük a **Lejátszás** gombbal, de a **Szerkesztő Protokoll**ból is sokat tanulhatunk.

A feladat megértése és bebizonyítása sem egyszerű, ezért ez a munkalap nagy segítség, mind a feladat megértésében és értelmezésében, valamint a megoldás helyességének bebizonyításában is. Ezt a példát mindenképpen a jobb képességű tanulóknak ajánlom. Ez a szép feladat nem az általam használt tankönyvből való, így témájában a háromszög köreihez soroltam. Viszont érdemes elővenni ezt a példát akkor is, amikor a látókör fogalmával megismerkednek a tanulók.

5.1.6. Thalész-kör

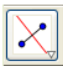
A Thalész-tétellel kapcsolatban egy olyan feladatot választottam melynek kapcsán a geometriai feladat diszkusszióját is elvégezhetjük.
A feladat a 9.-es tankönyvben található, **144. old. /4.b**.

Feladat: Szerkesszünk háromszöget, ha adott két magasságának talppontja és a harmadik oldal egyenese. Vizsgáljuk meg, hogy a pontok és az egyenes kölcsönös helyzetétől függően hány megoldása van a feladatnak.
A megoldást a melléklet Munkalap29: Thalész-kör lapja tartalmazza. Az oldalról készült képet pedig az alábbi **36. ábra** mutatja.
A szerkesztés lépései az ábrán és a rajzlapon is láthatók.



36. ábra

A munkalapon a **Navigációs eszköztáron** lépegetve, vagy a **Lejátszás** gombra kattintva a szerkesztés menete megnézhető. A feladat megoldásainak száma pedig a $\mathbf{T_a}$,$\mathbf{T_b}$, **P** és **Q** pontokat mozgatva látható.

A feladat megvalósítása az előbbiekben tárgyaltakhoz hasonlóan történt. Egyetlen új eleme a szerkesztés menetének a $\mathbf{T_aT_b}$ szakasz felezőmerőlegesének megrajzolása. Ezt a lépést az eszközsor  szakasz felező ikonjával oldottam meg, az ikon kiválasztása után kijelöltem a $\mathbf{T_a}$,$\mathbf{T_b}$, pontokat. Ugyanezt a lépést a parancssorba írt **szakaszfelező[Ta ,Tb]** paranccsal is megoldhattuk volna.

A szerkesztésnek nem minden lépése látható az ábrán, ugyanis az áttekinthetőséget zavarná a sok segédvonal. Viszont a **Szerkesztő Protokollon** megnézhető a szerkesztés összes lépése.

Amennyiben mozgatjuk a $\mathbf{T_a}$,$\mathbf{T_b}$, **P** vagy **Q** pontokat, azt tapasztaljuk, hogy a feladatnak 1 vagy 0 megoldása van attól függően, hogy a $\mathbf{T_aT_b}$ húr szakaszfelező merőlegese metszi-e vagy sem a **PQ** szakasz egyenesét.

Ajánlom ezt a példát bemutatni a matematika órán, ugyanis így jobban átlátható a diák számára, mit is jelent a diszkusszió, és mire kell gondolnia, ha egy feladat megoldásainak számát kell megadnia.

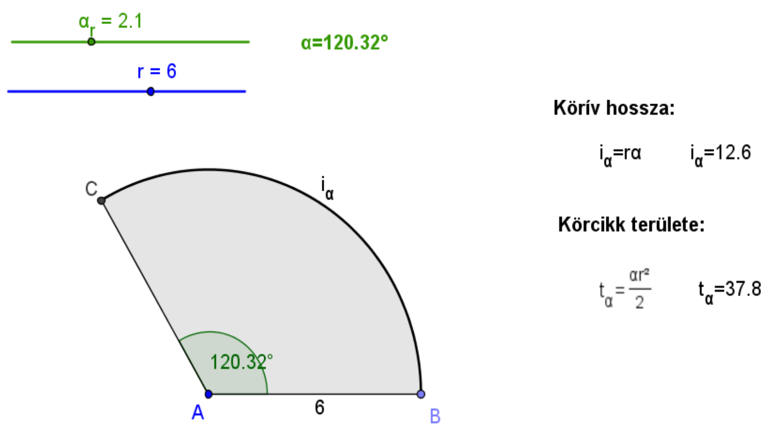
5.2. Síkgeometria a 10. évfolyamon

Ebben a tanévben a körrel kapcsolatos ismereteket tárgyaljuk. Majd néhány további fontos tétel kerül előtérbe, mint a párhuzamos szelők-tétele, magasságtétel, befogótétel. Ezen új ismeretek bemutatására, valamint konkrét feladatok megoldására készítettem el a következő munkalapokat, melyet a melléklet **Síkgeometria** fejezetének **10. évfolyam** feladatai között találunk.

5.2.1. Körív hossza, körcikk területe

Ennél a témakörnél a legnehezebb feladat, megtanítani a tanulóknak a szög radiánban való mérését és a radiánban megadott szöggel történő számítást.
Ennek szemléltetésére és a szög és radián közötti összefüggés bemutatására ajánlom a következő oldalt, melyet a fenti melléklet Munkalap30: körív hossza, körcikk területe alatt találunk meg. A rajzlap képét az alábbi **37. ábrán** láthatjuk.

A munkalapon a körcikk **α** szögét (radiánban adott) és **r** sugarát a csúszkán szabályozhatjuk.
Ezek függvényében kapjuk a szóban forgó körcikk rajzát, területét, valamint a körcikkhez tartozó körív hosszát.



37. ábra

A feladat megoldása során először a két csúszkát kellett felvennem. A szöget azért ábrázoltam radiánban, mert a GeoGebra-ban radiánban megadott szögeket át tudunk számítani fokra, viszont fordítva nem. Ugyanis, ha egy fokban megadott szöggel műveleteket végzünk, például elosztjuk 180°-kal, hogy radiánba átváltsuk, akkor is az eredmény mellett feltünteti a program a ° mértékegységet. Viszont az ábrán is látható, hogy a radiánban felvett szöget könnyen átválthatjuk fokra a **szög[α_r]** paranccsal.
A csúszkák és az átváltás után felvettem az **A** pontot, ami körül megrajzoltam az **r** sugarú kört. A **B** pontot, ezen a körvonalon jelöltem ki és megrajzoltam az **AB** sugarat. A **C** pontot megszerkeszthetjük elemi geometriai módszerekkel, amiket már tárgyaltunk. Vagyis az **AB** szakaszra felmérjük az **α** nagyságú szöget, majd vesszük az eredeti kör és a szögszár metszéspontját, így kapjuk **C** pontot.
Viszont én ennél egyszerűbben szerkesztettem meg a **C** pont helyét, az **A** pont körül elforgattam a **B** pontot **α** szöggel, a **forgatás[B, α, A]**[3.] paranccsal.

[3] A forgatás részletezése a geometriai transzformációknál következik.

Miután meghatároztam a körcikk **A**, **B**, **C** pontjait, a körív és körcikk megrajzolásához a program eddig nem használt ikonjait alkalmaztam.

- A körív megrajzolásához az eszközsor  körív középponttal és két pontjával ikonját használtam, megfelelő sorrendben kijelölve a pontokat. Ekkor a program automatikusan kiszámolja és az algebra ablakban megjeleníti a körív hosszát.
- A körcikk megrajzolásához és területének kiszámításához pedig az eszközsor  körcikk középpontjával és két pontjával ikonját alkalmaztam és kijelöltem a három pontot.

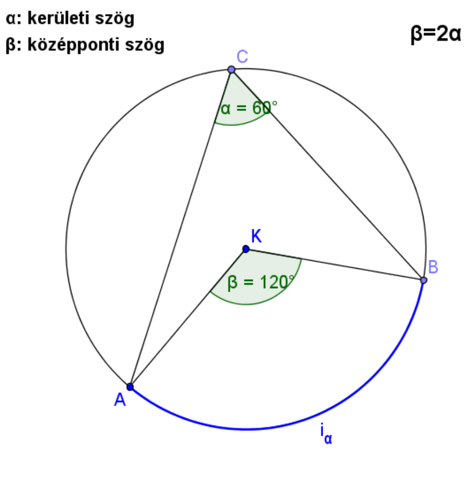
Természetesen végül a feladatot megformáztam, a szögeket, az ívet és a területet átneveztem. Utoljára pedig a már ismert módon a képleteket és az eredményeket a rajzlapon megjelenítettem.

A feladat kiválóan alkalmas egyrészt a számításos feladatok gyors ellenőrzésére. Továbbá bemutatható segítségével az ívmérték és a fok közötti összefüggés, valamint a radiánban történő számítás menete.

5.2.2. Középponti és kerületi szögek tétele

Ez a tétel önmagában nem nehéz. A diákok gyorsan megértik és tudják is alkalmazni. Azért tartottam fontosnak ezt a feladatot kiemelni, mert itt egy munkalapon nemcsak egy tételt, hanem kettőt is nagyon jól tudunk szemléltetni.

Tekintsük meg a szóban forgó melléklet Munkalap31: kerületi és középponti szögek oldalát, valamint a hozzá tartozó **38. ábrát**.



38. ábra

A munkalapon a kör **K** középpontja, a körívet alkotó **A** és **B** pontok valamint **C** pont is mozgatható. Nyilván **C** pontnak az **AB** íven kívül kell elhelyezkednie.

A pontok mozgatásával megfigyelhető két tétel állítása is. Egyik a kerületi szögek tétele, másik pedig a középponti és kerületi szögek tétele.

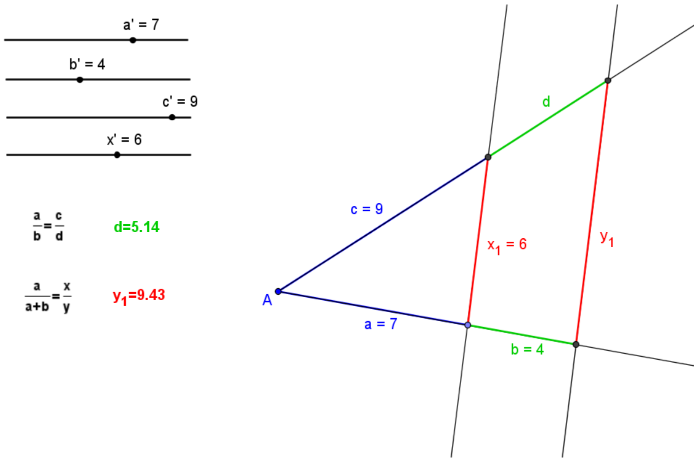
Ha a **C** pontot mozgatjuk az **AB** köríven kívül, akkor azt látjuk, hogy az **α** kerületi szög nagysága nem változik. Azaz igaz a kerületi szögek tétele, miszerint ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögek ugyanakkora nagyságúak. Viszont ha az **A** vagy **B** pontokat mozgatjuk, akkor változik az **α** és a **β** szög nagysága is, de minden esetben **β=2α** összefüggés fennáll, ami a középponti és kerületi szögek tételét igazolja.

A feladat megoldása a már ismertetett módszereket és formázásokat tartalmazza, ezért nem részletezem. Viszont érdemesnek tartom a munkalap tanórai bemutatását, ugyanis a pontok mozgatásával tényleg látványosan tudjuk igazolni a diákoknak a fenti két állítást.

5.2.3. Párhuzamos szelők

Az előbbi részhez hasonlóan itt is egyszerre két ismert tétel bemutatására készítettem a megfelelő munkalapot. Ez a két tétel a párhuzamos szelő, illetve a párhuzamos szelőszakaszok tétele. Bár ez az oldal nem a tételek bizonyítását szolgálja, hanem a tételekkel kapcsolatos képleteket és számításokat tartalmazza.
Nézzük meg a melléklet Munkalap32: párhuzamos szelők oldalát, és az oldalról készült **39. ábrát**.

A munkalapon az **a**, **b**, **c** és **x** szakaszok hossza a csúszkán változtatható.
Ezek függvényében változik a párhuzamos szelők ábrája, és a képletek szerint kiszámított **d** és **y** szakaszok hossza.



39. ábra

A feladat megoldása nem volt nehéz, de sok lépésből állt. Miután felvettem a négy csúszkát, a megadott szakaszokból kellett megszerkeszteni az ábrán látható képet. A szerkesztés lépései az előbbi geometriai szerkesztésekből logikusan következik. Először létrehoztam az **a**, **c** és **x** szakaszokból az ábra kisebbik háromszögét. Majd az **A** pontból kiinduló félegyeneseket kellett rajzolni a háromszög oldalaira illesztve.

A félegyenes megrajzolása az eszközsor félegyenes ikonjának kiválasztásával, majd a két megfelelő pont kijelölésével történt. Először mindig a félegyenes kezdőpontját kell megadni. Félegyenest rajzolhattuk volna a **félegyenes[A,B]** paranccsal is, ahol az **A** pont a félegyenes kezdőpontja.

Majd az **a** szakaszt tartalmazó félegyenesre felmértem a **b** szakasz hosszát és a végpontjába párhuzamost szerkesztettem az **x** szakasszal. Így kaptam meg az **y** szakaszt és a **d** szakaszt. Természetesen az ábra méretarányos a csúszkán beállított és a számított értékekkel.

Apró hibája a feladatnak, hogy ugyanazt a szakaszt különböző indexelésekkel jelöltem. Például **a'=a**. Ennek oka, hogy ugyanazt a betűt nem lehet kétszer használni a GeoGebra-ban egy munkalapon. Vagyis amikor felvettem az **a** számot a csúszkának, akkor azt már nem használhattam az **a** szakasz elnevezésére. Éppen ezért a különböző indexelésű számok és szakaszok ugyanazt a szakaszt jelölik ebben a feladatban.

A szerkesztés itt is jóval több lépésből áll, mint ami az ábrán látható, de ennek a feladatnak a lényege a két tétel bemutatása és a szükséges számítások elvégzése. Jól tudjuk alkalmazni, a tételek bemutatásánál és a számításos feladatok ellenőrzésénél, ha a megfelelő értékeket állítjuk be a csúszkán.

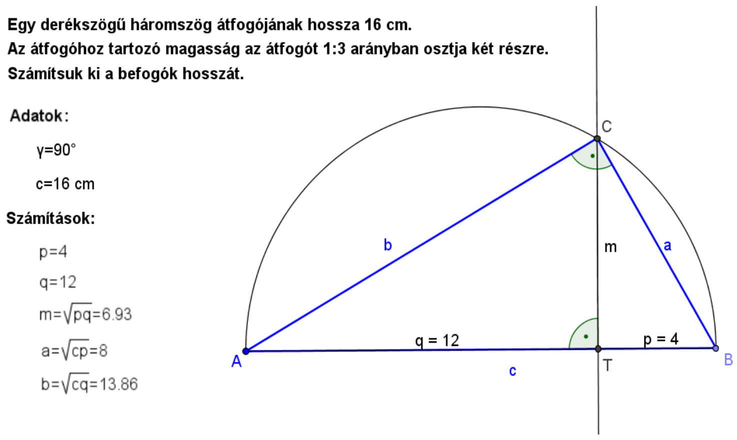
5.2.4. Arányossági tételek a derékszögű háromszögben

A derékszögű háromszögekkel kapcsolatos arányossági tételeket, a magasságtételt és befogótételt egy konkrét tankönyvi feladat segítségével mutatom be.

A feladat a 10.-es tankönyvben található, **145. old / 3**.

Feladat: Egy derékszögű háromszög átfogójának hossza 16 cm. Az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót 1:3 arányban osztja két részre. Számítsuk ki a befogók hosszát.

A feladat megoldását a melléklet Munkalap33: arányossági-tételek a derékszögű háromszögben oldala tartalmazza. A feladathoz tartozó számítások és a szerkesztés menete a munkalapon látható. A munkalapról készült képet pedig az alábbi **40. ábrán** látható.



40. ábra

A munkalap a konkrét feladat megoldását tartalmazza. Azonban a háromszög **c** oldalán található **T** pont mozgatásával, más hasonló feladatok megoldását is leolvashatjuk az ábráról.

A **Lejátszás** gombbal pedig a szerkesztést nézhetjük meg.

A munkalap létrehozása a **c** szakasz megrajzolásával kezdődik. Ezután a **c** oldalt a megadott arányban felosztottam és kaptam a **T** pontot. Majd az **AB** szakasz mint átmérő fölé rajzoltam egy félkörívet a  félkör ikon segítségével. A **T** pontból állított merőleges és a félkör metszéspontja adja a derékszögű háromszög **C** csúcsát. Ezután megrajzoltam a háromszög oldalait és a **CT** szakaszt, mint a háromszög magasságát amit **m**-mel jelöltem.

A rajzlapon a szerkesztés mellett a magasságtételhez és a befogótételhez tartozó összefüggéseket, valamint a hiányzó értékeket: **m**, **a** és **b** pedig kiírattam.

A munkalap egy konkrét példa megoldását tartalmazta. Viszont ennek a példának a mintájára megvalósíthatnánk a példa általánosítását. Például megtehetnénk, hogy a **p** és **q** szakaszokat paraméteresen vennénk fel és ezek függvényében bármilyen magasságtétellel, vagy befogótétellel kapcsolatos számítást elvégezhetnénk.

A síkgeometria témakörben tárgyalt feladatok is mutatják a GeoGebra program sokoldalúságát. Láthattuk, hogy a geometriában is sokrétűen tudjuk használni a programot általános és konkrét példák megoldására is. Ebben a témakörben a legtöbb feladatot mint láttuk, ikonok segítségével végre tudjuk hajtani. Ezért igen látványos példákat és szerkesztéseket hozhatunk létre. Érdemes ezeket a szerkesztési lépéseket is bemutatni a tanulóknak, nemcsak a kész munkalapokat.

Továbbá alkalmas a program szerkesztések visszajátszására, bizonyítások szemléltetésére, geometriai számítások elvégzésére és diszkusszió készítésére is.

6. Geometriai transzformációk a GeoGebra-ban

Ha geometriai transzformációkkal kapcsolatos feladatokat szeretnénk megoldani a GeoGebra-val, akkor a síkgeometriához hasonlóan a program indítása után célszerű a **Nézet** menüben a **Tengelyeket** és a **Rácsot** eltüntetni. Továbbá az **Algebra ablak**ra sincs szükségünk ebben a témakörben.

Geometriai transzformációkkal a 9.-es és 10.-es tananyagban találkozunk. 9. évfolyamon az egybevágósági transzformációk, míg 10.-ben a hasonlósági transzformációk szerepelnek a törzsanyagban. A témakör mindegyik anyagrészéhez több új, hasznos GeoGebra parancsot és hozzákapcsolódó ikont mutatok be, amelyeket nem csak a geometriai transzformációknál tudunk használni. A fejezethez tartozó munkalapokat a melléklet **Geometriai transzformációk** fejezete tartalmazza.

6.1. Geometriai transzformációk a 9. évfolyamon

Ebben a fejezetben az ismert egybevágósági transzformációkat veszem sorba, bemutatva mindegyik transzformáció estén, a GeoGebra program lehetőségeit. Valamint az eddigiekhez hasonlóan megemlítem mindegyik munkalap kapcsán, mire is tudjuk használni az így elkészült oldalakat.

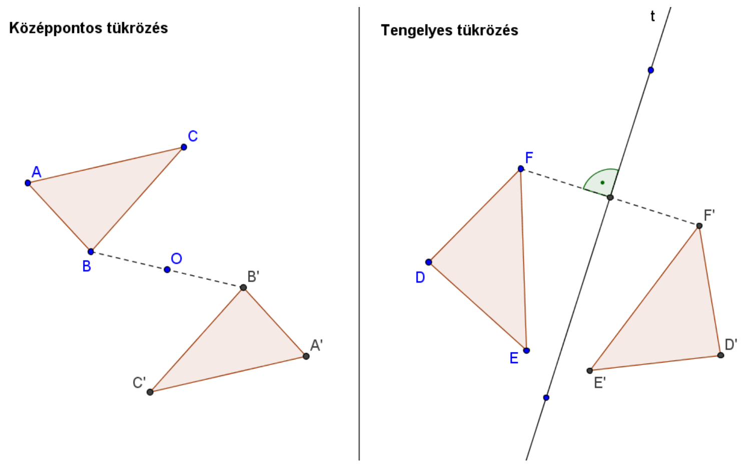
Az egybevágósági transzformációkat tartalmazó munkalapokat a melléklet **Geometriai transzformációk 9. évfolyam** fejezete alatt találjuk meg.

6.1.1. Tükrözések

A középpontos és tengelyes tükrözést egy munkalapon mutatom be, melyet a fenti melléklet Munkalap34: tükrözések oldala láthatunk. A munkalapról készült képet pedig az alábbi **41. ábra** tartalmazza.

A munkalapon látható **O** középpont, **t** tengely valamint a háromszögek **ABC** és **DEF** csúcsai a rajzlapon mozgathatók.

Ezek függvényében kapjuk a háromszögek középpontos, illetve tengelyes tükörképét.



41. ábra

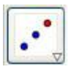
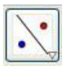
A feladat megoldása a háromszögek valamint az **O** pont és a **t** tengely felvételével kezdődött. Ezt a síkgeometriánál megismert módon oldottam meg. Mivel az egyenest két pontjával rajzolhatjuk meg, ezért az egyenes mozgatása is e két pont vonszolásával történik.

A feladat lényegi része a tükrözések elvégzése volt. Mindegyik tükrözést egyszerűen a **tükrözés[ ]** paranccsal egyetlen lépésben is el tudunk végezni. Csak arra kell figyelni, hogy mit és mire (pontra vagy egyenesre) akarunk tükrözni.

Néhány példa tükrözésekre:

- **tükrözés[A,O]** parancs az **A** pontot tükrözi az **O** pontra,
- **tükrözés[P,O]** parancs az **P** sokszöget tükrözi az **O** pontra,
- **tükrözés[A,t]** parancs az **A** pontot tükrözi az **t** tengelyre,
- **tükrözés[Q,t]** parancs a **Q** sokszöget tükrözi a **t** tengelyre .

Vagyis tükrözhetjük az alakzatokat pontonként is. De egyetlen paranccsal is megoldható tetszőleges sokszög tükrözése akár centrálisan, akár tengelyesen is.

Tükrözhetjük az alakzatokat az eszközsor megfelelő ikonjaival is. Ha középpontosan szeretnénk tükrözni, akkor  centrális tükrözés ikont míg tengelyes tükrözésnél a  tengelyes tükrözés ikont használhatjuk. Az ikonok alkalmazása esetén is van lehetőségünk pontok és alakzatok kijelölésére és tükrözésére. Arra kell csak figyelnünk, hogy az ikon kiválasztása után először a tükrözendő alakzatot jelöljük ki, majd azt amire tükrözni szeretnénk. Természetesen a tükrözött alakzatokat a program automatikusan elnevezi, amiket a szokásos jelölések szerint átnevezhetünk.

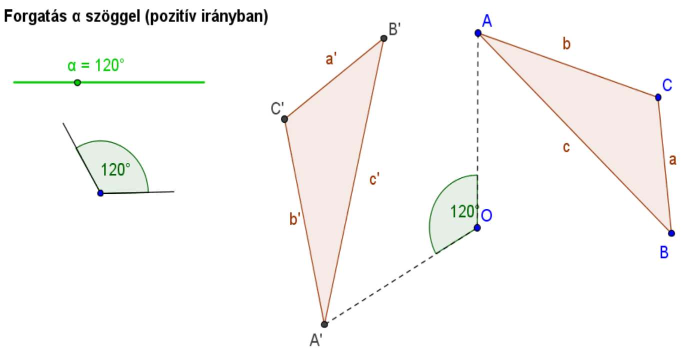
A munkalap bemutatása a matematika órákon nagyban megkönnyíti a munkánkat. Egyrészt nem kell táblán szerkesztő eszközökkel szerkesztenünk, és ezzel sok időt nyerünk. Másrészt még jó eszközökkel sem tudunk, ilyen pontos és szép szerkesztéseket végezni.

További előnye a munkalapnak, hogy az **O** pont és a **t** tengely mozgatásával a transzformációk tulajdonságait is bemutathatjuk a diákoknak. Például az **O** pont mozgatásával megfogalmazhatjuk a fixpont, fix egyenes és invariáns egyenesekkel kapcsolatos állításokat. De természetesen azt is észrevehetjük, hogy középpontos tükrözésnél szakasz és képe mindig párhuzamos lesz. Tengelyes tükrözésnél a **t** tengely mozgatásával fogalmazhatunk meg hasonló állításokat.

6.1.2. Forgatás

A forgatás az a transzformáció, amit a legnehezebben értenek meg a diákok és ezért sok tanulónak gondot okoz a megszerkesztése is. Ennek a problémának a megoldására készítettem el a következő munkalapot, abban a reményben, hogy segítséget nyújt a matematika órákon.

A munkalapot a szóban forgó melléklet Munkalap35: forgatás oldalán találjuk meg és a hozzá kapcsolódó képet az alábbi **42. ábrán** láthatjuk.

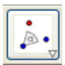


42. ábra

A rajzlapon a forgatás szögét a csúszkán szabályozhatjuk, és ennek függvényében változik az eredeti **ABC** háromszög **O** pont körüli elforgatott képe.

Természetesen az **O** középpont és az **ABC** háromszög csúcsai is mozgathatok az oldalon.

A munkalap létrehozását az **α** szög felvételével és a szög megrajzolásával kezdtem. Magát a szög rajzát is forgatással hoztam létre. Majd megrajzoltam az **ABC** háromszöget és kijelöltem az **O** középpontot. Ezután a forgatás parancs és ikon segítségével is elvégezhető ugyanazt az eredményt kapjuk.

- **forgatás[S,α,O]** parancs segítségével az **S** alakzatot a megadott **α** szöggel **O** pont körül egy lépésben elforgatjuk, vagy
- az eszközsor  pont körüli forgatás adott szöggel ikon segítségével, az ikon kiválasztása után először a forgatandó alakzatot, majd a forgatás középpontját kell kijelölni és ezután megadni a forgatás szögét és irányát.

Az általam készített munkalapon csak az óramutató járásával ellentétes irányú forgatást mutattam be, de hasonlóan megvalósítható lenne a másik irányú forgatás is.

A munkalap készítés utolsó lépése itt is a formázás és a szokásos jelölések létrehozása.

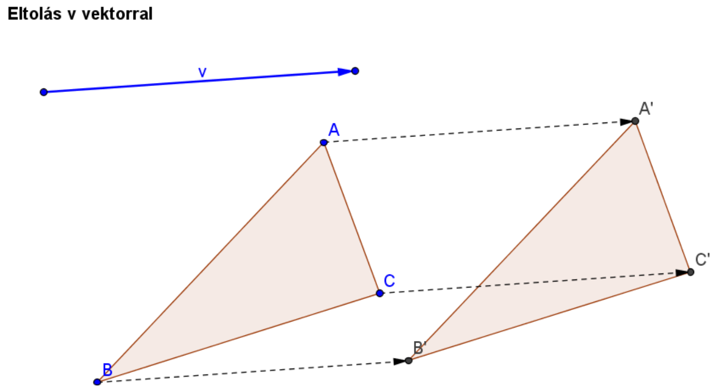
Végül a munkalap előnyeiről pár szó. Az **α** szög változtatásával, igen jól szemléltethető a forgatás lényege. Látható az ábrán, hogy az **A** pont **OA** sugarú körvonalon mozog és az elfordulás szöge pontosan **α**.

Továbbá a szög változtatásával és az **O** pont mozgatásával itt is be tudjuk mutatni a forgatás tulajdonságait. Azaz milyen feltételek esetén létezik fixpont, fix egyenes és invariáns egyenes.
Megfigyelhető az ábrán az is, hogy az **α**=180°-os forgatás a középpontos tükrözésnek felel meg. Összegezve, ez a feladat is segítheti a tanórákon az anyag megértését, következtetések levonását, ezért ajánlom tanároknak és diákoknak egyaránt.

6.1.3. Eltolás

Az eltolás önmagában nem jelent nehézséget a tanulóknak, de az eltolást meghatározó vektorok miatt érdemes neki figyelmet szentelni.
Nézzük meg a melléklet Munkalap36: eltolás oldalát, és az alábbi **43. ábrát**.

A munkalapon változtatható a vektor nagysága, állása és iránya is. Valamint mozgatható az **ABC** háromszög mindhárom csúcsa. Ezek függvényében kapjuk a háromszög **v** vektorral eltolt képét.



43. ábra

A megoldásban újdonság a vektor felvétele volt. Vektort rajzolni többféleképpen tudunk:

- **vektor[D,E]** paranccsal, ahol **D** a kezdőpont, **E** pedig a végpont,
- vagy az eszköztáron kiválasztjuk a  vektor ikonját és a rajzlapon pedig kijelöljük a vektor kezdő és végpontját.

A vektor megrajzolása és a háromszög felvétele után az eltolást kellett elvégezni, mely történhet parancs és ikon segítségével is:

- **eltolás[P,v]** paranccsal, ahol **P** esetünkben a sokszöget jelenti, de lehet más alakzat is, **v** pedig az eltolás vektora,
- az eszközsor  eltolás ikonjával, ahol az ikon kiválasztása után az eltolni kívánt alakzatot, majd az eltolás vektorát kell megadnunk,

➢ amennyiben csak egy pontot szeretnénk eltolni, az előzőkön túl használhatjuk az eszközsor  vektor pontból ikonját is.

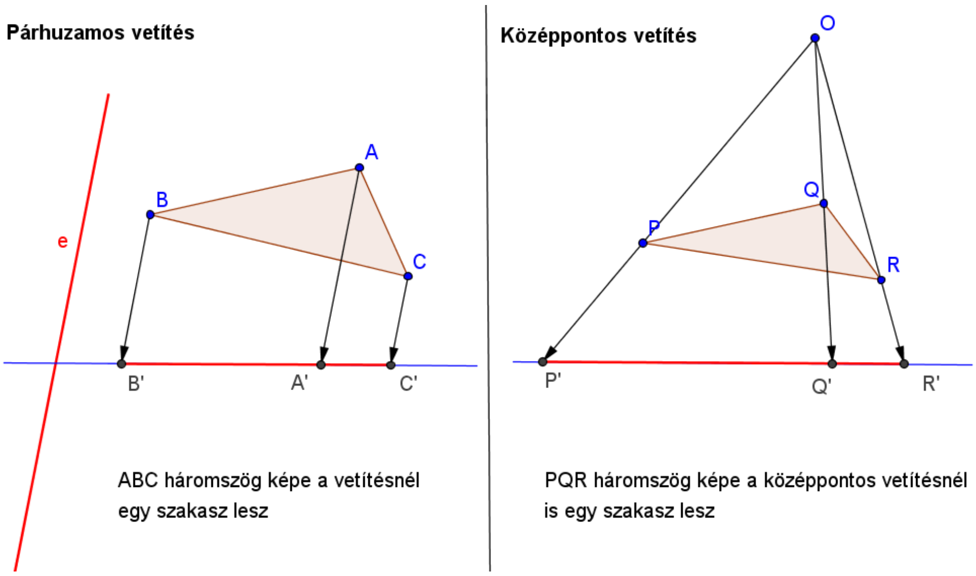
Utolsó lépése a szerkesztésnek a munkalap megformázása, a megfelelő jelölések létrehozása.

Ennek a munkalapnak az előnye, a szemléltetésen túl az eltolás tulajdonságainak vizsgálata. De arra is alkalmas, hogy a vektorokkal kapcsolatos alapfogalmakat bevezessük.

6.1.4. Vetítések

A párhuzamos és középpontos vetítés nem tartozik az egybevágósági transzformációk közé, és nem képezi a 9-es törzsanyagot sem. Ennek ellenére a tankönyv is utal rá, mint geometriai transzformációkra, és én mindig bemutatom tanórán, mint érdekességet a diákoknak. Fontosnak tartom, hogy a tanulók lássanak más, nem feltétlenül egybevágósági transzformációkat is.

Ennek bemutatására készítettem a következő munkalapot, melyet a melléklet Munkalap37: vetítések cím alatt találunk meg. Az oldalról készült kép ábráját a **44. ábrán** láthatjuk.



44. ábra

A munkalap mindkét rajzán a pontok mozgathatók és amennyiben a pontok és képük a rajzlapon marad megkapjuk a háromszögek párhuzamos és merőleges vetületét. Látható az ábrán, hogy ennél a transzformációnál háromszög képe nem is háromszög, hanem szakasz lesz.

Azt is tudjuk szemléltetni, hogy ugyanannak a háromszögnek a képe is változhat, és nem feltétlen ugyanakkora nagyságú szakaszt kapunk képként ha középpontosan vetítünk.

A feladat megoldása sok apró lépésből állt, de egyik lépés sem volt önmagában újdonság a síkgeometria fejezetben megismertekhez képest. Ezt az oldalt csakis szemléltetésre szánom, érdekesebbé tehetjük vele a transzformációkról alkotott képet a diákok számára.

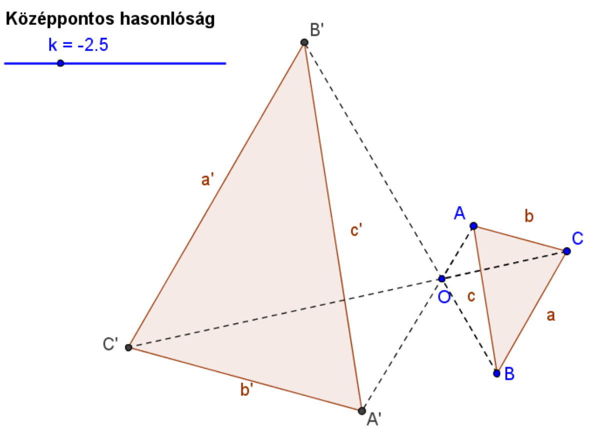
6.2. Geometriai transzformációk a 10.évfolyamon

Ebben az évben a középpontos hasonlósággal és a hasonlósági transzformációval ismerkednek meg a tanulók. Mindegyik transzformációt egy-egy munkalapon mutatom be, és leírom melyik oldal milyen új elemeket tartalmaz az eddigieken túl.

A fejezethez tartozó két munkalapot a melléklet **Geometriai transzformációk 10. évfolyam** alfejezete alatt találjuk meg.

6.2.1. Középpontos hasonlóság

A középpontos hasonlósági transzformáció bemutatására és feladatok megoldására is alkalmas a következő munkalap, melyet a fenti melléklet Munkalap38: középpontos hasonlóság oldalán megnézhetünk. A hozzá tartozó képet pedig a lenti **45. ábrán** láthatjuk.



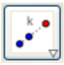
45. ábra

A munkalapon a középpontos hasonlóság **k** arányát a csúszkán (-5,5) intervallumban szabályozhatjuk.

Továbbá a középpontos hasonlóság **O** középpontját és az **ABC** háromszög csúcsait a rajzlapon mozgathatjuk.

Ezek függvényében kapjuk az aktuális háromszög **k** arányú hasonlósági képét.

A munkalap létrehozása a csúszka, a háromszög és az **O** pont felvételével kezdődött. Ezután pedig a középpontos nyújtást kellett elkészítenem, melyre szintén két lehetőségem volt:

- **nyújtás[P,k,O]** parancs használata, melynél a **P** sokszög **k** előjeles nagyságú O középpont körüli nyújtott képét kapom,
- az eszközsor  nyújtás ikonját választva megadom a sokszöget, majd a középpontot és végül a megnyíló ablakba beírom a hasonlóság arányát.

Mindkét esetben ugyanazt az ábrát kapom képként. Továbbá akár paranccsal vagy ikonnal szerkesztem meg a képet, nemcsak sokszög, hanem tetszőleges alakzat középpontosan hasonló képét meg tudom rajzolni. Láthatjuk, hogy ezt a viszonylag sok szerkesztést igénylő transzformációt is nagyon egyszerűen egyetlen paranccsal vagy ikonnal tudjuk kivitelezni a GeoGebra-ban.

A munkalapot a középpontos hasonlóság, mint új anyag tanításánál használnám a tanórákon. Segítségével könnyen be tudom mutatni az alakzatok egyező állású vagy fordított állású képét, valamint hogy mikor beszélünk nagyításról vagy kicsinyítésről.

Továbbá a feladat kapcsán szemléletesen meg lehet tanítani az egybevágósági transzformációkhoz hasonlóan a középpontos hasonlóság tulajdonságait. A **k** hasonlósági arány változtatásával azt is meg lehet mutatni, hogy a |**k**|=1 arányú középpontos hasonlóság egybevágósági transzformáció, és **k**=1 esetén identitás, **k**=-1 esetén pedig középpontos tükrözés. Természetesen ezzel a munkalappal is időt és energiát nyerhetünk ha kivetítjük a matematika órákon.

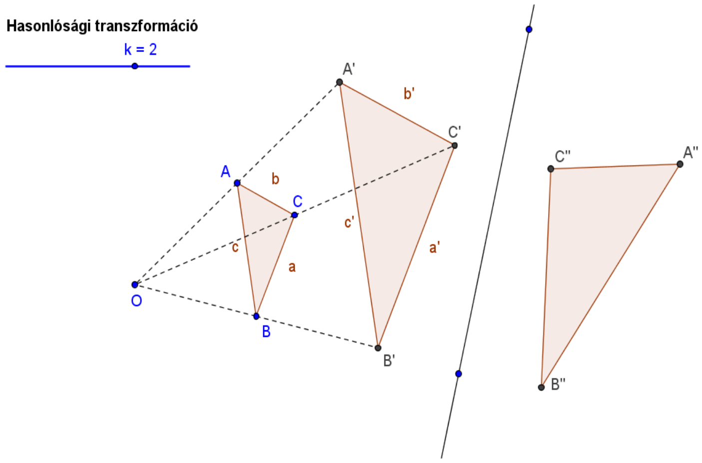
6.2.2. Hasonlósági transzformáció

Mint tudjuk, a hasonlósági transzformáció egy középpontos hasonlóság és egybevágósági transzformációk egymásutánja. Az általam készített feladat egy középpontos hasonlóság és egy tengelyes tükrözés egymásutánjából áll. De természetesen a tengelyes tükrözés helyett más egybevágósági transzformációt is választhattam volna. Mivel már új elemeket nem tartalmaz a szerkesztést illetően ez a munkalap, csak a szemléltetés miatt tartottam fontosnak ezt az oldalt elkészíteni.

A hasonlósági transzformációról készült munkalapot a melléklet Munkalap39: hasonlósági transzformáció oldala alatt találjuk meg, és a róla készült képet az alábbi **46. ábrán** láthatjuk.

A rajzlapon a hasonlóság **k** nya a csúszkán állítható. Valamint az **O** középpont és az **ABC** háromszög csúcsai pedig a rajzlapon mozgathatók. Továbbá a tükörtengely is a kijelölt két pontjával mozgatható.

Mindezek függvényében kapjuk az eredeti háromszög hasonló képét.



46. ábra

A feladat megvalósítása egyszerű, az előbb ismertetett transzformációs lépések egymásutánjából áll, ezért nem részletezem.

Mint említettem ezt az oldalt csakis szemléltetésre szánom az órákon, bemutatva ezzel a munkalappal a hasonlósági transzformáció fogalmát. Továbbá érdemes az oldal kapcsán a háromszögek hasonlóságáról is néhány szót ejteni.

Összegezve a geometriai transzformációkról elmondottakat, szinte minden e témakörben előkerülő feladatot könnyen meg tudunk oldani a GeoGebra-ban. Mint láttuk minden transzformációt egyetlen paranccsal, vagy ikonnal végre tudunk hajtani és nagyon szemléletes áttekinthető ábrákat kapunk. Ezért ebben a témakörben kifejezetten ajánlom a program matematika órán való használatát főleg tanárok számára.

7. Trigonometria a GeoGebra-ban

Trigonometriával 10. és 11. évfolyam tananyagában találkozunk. A trigonometria alapjait 10.-ben vesszük, 11.-re csak a trigonometrikus függvények és egyenletek képezik a tananyag részét. Ezekkel kapcsolatos feladatokat már a megfelelő fejezetekben -függvények, egyenletek- már sorra vettem, így ezekkel itt nem foglalkozom. Vagyis az ebben a fejezetben található példák kifejezetten a 10-es tankönyv anyagára épülnek.

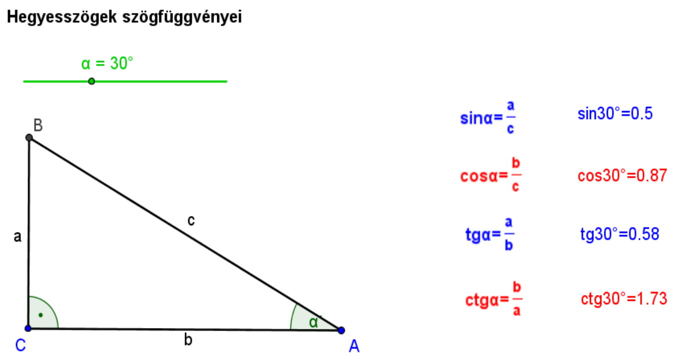
7.1.Trigonometria a 10.évfolyamon

Ebben a tanévben ismerkednek meg a tanulók a hegyesszögek szögfüggvényeivel, a trigonometrikus számításokkal és a forgásszögek szögfüggvényeivel. Tapasztalataim szerint ez a témakör az átlagos képességű diákoknak általában nehéz. Az anyag könnyebb megértésére és megtanítására készítettem el a következő munkalapokat, bízva abban, hogy jól használhatók lesznek a matematika oktatásban.
A feladatokhoz tartozó munkalapokat a melléklet **Trigonometria fejezet 10. évfolyam** alatt találjuk meg.

7.1.1. Hegyesszögek szögfüggvényei

A hegyesszögek szögfüggvényeihez készült munkalap a melléklet előbb említett fejezetének Munkalap40: hegyesszögek szögfüggvényei cím alatt található. Ezzel párhuzamosan nézzük meg a lenti **47. ábrát**.

A derékszögű háromszög **α** szöge a csúszkán változtatható 0-90° között. Ennek függvényében kapjuk az aktuális háromszög ábráját és az **α** szög szögfüggvényeit. A háromszög **A** csúcsa is mozgatható a rajzlapon, ezzel tudjuk a háromszöget nagyítani és kicsinyíteni.



47. ábra

A munkalap elkészítését a csúszka felvételével kezdtem. Ezután megszerkesztettem a derékszögű háromszöget elemi geometriai módszerekkel. A háromszög oldalainak hossza természetesen tetszőleges volt a szerkesztésnél, csak a derékszöget és a megadott **α** szöget kellett figyelembe venni a szerkesztésnél. Ezután kiírattam a rajzlapra a szögfüggvények képletét és az aktuális **α** szöghöz tartozó szögfüggvényértékeket. Ezek meghatározásához a GeoGebra beépített függvényeit használtam: **sin(α), cos(α)**, **tan(α**) illetve a kotangens esetén az **1/tan(α)** parancsot írtam a parancssorba.

Ez a munkalap alkalmas egy adott hegyesszög szögfüggvényértékeinek kiszámítására. Ha változtatjuk az **α** szöget gyorsan megkapjuk az adott szög mindegyik szögfüggvényértékét. Ezért a trigonometrikus függvények készítésénél is használhatjuk a számítás megkönnyítésére.

Továbbá alkalmas ez az oldal a szögfüggvények értelmezésének magyarázatánál is. Az **A** pont mozgatásával a háromszöget nagyítani és kicsinyíteni tudjuk, vagyis az eredetihez hasonló háromszöget kapunk. Ez a hasonlóság fogalmának elmélyítésében is segít. Valamint az is látható, hogy a háromszög szögei nagyításnál és kicsinyítésnél nem változnak, és így a szögfüggvények értéke sem változik.

7.1.2. Látókör szerkesztés, a kör sugara

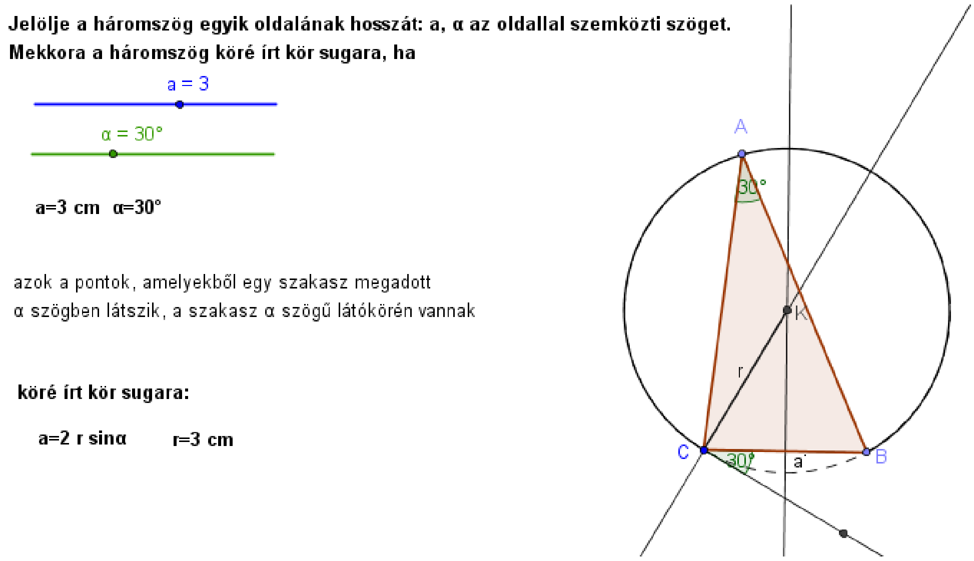
Ebben a részben egyszerre két egymáshoz szorosan kapcsolódó problémát oldottam meg egy konkrét tankönyvi feladat kapcsán.

A feladat a 10-es tankönyvben található, **171. old. / 5.**

Feladat: Jelölje a háromszög egyik oldalának hosszát: **a**, **α** az oldallal szemközti szöget. Mekkora a háromszög köré írt kör sugara, ha **a**=3 cm és **α**=30°?

A feladat tulajdonképpen a háromszög körülírt kör sugarának meghatározása. Ez egyszerű trigonometria számítással, képlettel megoldható. Ezért kiegészítettem a példát, a feladat megszerkesztésével is, ami nem más, mint adott **a** szakaszhoz **α** szögű látókört kell szerkeszteni. Ezzel a szerkesztéssel megkapjuk az összes olyan háromszöget -nemcsak egy ilyen létezik- ami a feladat feltételeinek eleget tesz.

Ezek után nézzük meg a melléklet Munkalap41: látókör szerkesztés, a kör sugara című oldalt, ami az előbb említett számítást és a hozzá kapcsolódó szerkesztést is tartalmazza. Valamint tekintsük a következő **48. ábrát**.



48. ábra

A munkalap működése: a háromszög megadott **a** oldala és **α** szöge a csúszkán változtatható és ennek függvényében kapjuk a háromszög köré írt körének sugarát.
A munkalapon a **Lejátszás** gomb segítségével megnézhetjük a látókör szerkesztésének menetét is. Igaz itt a szerkesztés nem minden lépése látható az áttekinthetőség miatt. Viszont ha szeretnénk megnézni a szerkesztés összes lépését, akkor használjuk a **Szerkesztő Protokoll** gombot. Így az is látható, hogy az egész feladat a már megismert elemi geometriai szerkesztési lépésekből áll.

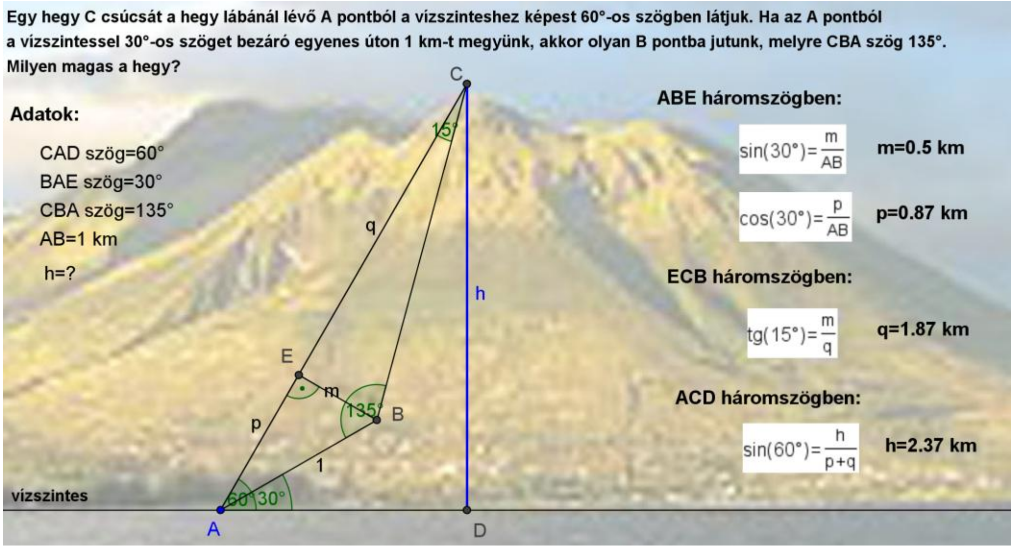
Ezzel a munkalappal, mint említettem kettős célom volt. Egyrészt megoldani egy konkrét feladatot, melyet az adatok változtatásával általánosíthatunk. Másrészt szemléltetni a konkrét számítási feladat mögött meghúzódó geometriai szerkesztést. Éppen ezért az oldalt használhatjuk a látókör szerkesztésének bemutatására is.

7.1.3. Trigonometriai számítás

A következő összetett feladat megértése, lerajzolása és megoldása is elég bonyolult. Ezért tartottam fontosnak bemutatni ezt a feladatot.
A példa a 10.-es tankönyvben található, **175. old. / 6**.

Feladat: Egy hegy **C** csúcsát a hegy lábánál lévő **A** pontból a vízszinteshez képest 60°-os szögben látjuk. Ha az **A** pontból a vízszintessel 30°-os szöget bezáró egyenes úton 1 km-t megyünk, akkor olyan **B** pontba jutunk, melyre **CBA** szög 135°.
Milyen magas a hegy?

A feladat megoldása a melléklet Munkalap42: trigonometriai számítás oldalán található, a geometriai ablak képe pedig az alábbi **49. ábrán** látható.



49. ábra

A munkalapon a feladat szövege, a kigyűjtött adatok és a méretarányos rajz is látható. A megoldáshoz szükséges trigonometriai összefüggések és az eredmények a munkalap jobb oldalán helyezkednek el. Látható, hogy a feladat maga és a szöveg alapján a rajz elkészítése is bonyolult.

A könnyebb megértést segítve a szerkesztést megtekinthetjük, ha a **Navigációs eszköztáron** a **Lejátszás** gombra kattintunk. Így láthatjuk azt is, hogy az ábra elkészítése is egészen sok, 45 lépésből állt.

A munkalap megvalósítása nemcsak hosszadalmas, de bonyolult is volt.

Maga a méretarányos ábra elkészítése sem volt egyszerű, a szerkesztés lépéseit nem részletezem, hiszen a **Szerkesztő Protokoll** tartalmazza.

A fő problémát a megfelelő nagyságú kép beszúrása és a már elkészült geometriai ábrának a háttérképre illesztése volt.

A háttérképet az eszközsor  kép beszúrása ikon segítségével illesztettem be. A kép beszúrásának menete, az ikon kiválasztása után a rajzlapra kell kattintani, úgy hogy a beillesztendő kép sarka odakerül, ahova a rajzlapon kattintunk. Természetesen az így beszúrt kép  mozgatás ikonnal mozgatható. Maga a rajzlap is mozgatható az eszközsor  rajzlap mozgatása ikonnal. Ezek segítségével hoztam fedésbe a háttérképet és a már elkészült ábrát.

Persze magát az ábrát, úgy hogy a méretarány megmaradjon, az eszközsor  nagyítás és  kicsinyítés ikonjaival méreteztem a hegy magasságához képest.

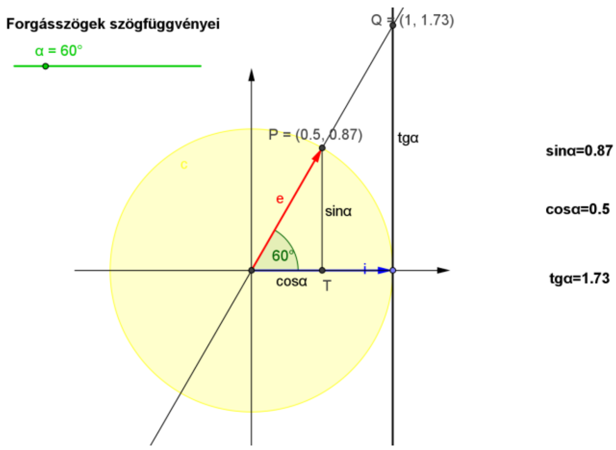
Mivel ez egy konkrét feladat, a munkalapon nem tudunk semmit sem mozgatni, az ábra pontjait fix alakzatnak vettem. Viszont maga a feladat megoldása és a szerkesztés lejátszása miatt érdemes a matematika órán bemutatni. Így talán a tanulók is jobban megértik és átlátják az ilyen típusú feladatok megoldásának menetét.

7.1.4. Forgásszögek szögfüggvényei

Ebben a témakörben a hegyesszög szögfüggvényeit kiterjesztjük tetszőleges nagyságú szögekre. Ennek bemutatására készítettem az itt következő munkalapot, melyet a melléklet Munkalap43: forgásszögek szögfüggvényei cím alatt találunk. Az oldalról készült képet a lenti **50. ábrán** láthatjuk.

A munkalapon az **α** forgásszög értéke 0-360° között állítható a csúszkán. Ennek hatására kapjuk az aktuálisan beállított forgásszög szögfüggvényértékeit.

Továbbá az ábrán és a munkalapon is jól látható a forgásszög szögfüggvényeinek értelmezése.



50. ábra

Ezt a munkalapot legfőképpen a forgásszögek értelmezésének bevezetésénél használnám. Egy ábrán jól látható, a három szögfüggvény értelmezése. Természetesen a tangenshez hasonlóan a kotangens értelmezése is elkészíthető. De érdemes használni ezt a munkalapot, ha egy adott szög szögfüggvényértékét akarjuk meghatározni, vagy a trigonometrikus függvényeket akarjuk ábrázolni. Ajánlom ezt a munkalapot tanároknak és diákoknak egyaránt.

Összegezve, a síkgeometriában megismert szerkesztési módszereket a trigonometriai feladatok megoldásánál is használhatjuk. Így ebben a témakörben is hasznos munkalapokat készíthetünk, melyeket tudunk használni az oktatásban.

8. Koordináta-geometria a GeoGebra-ban

A koordináta-geometriai feladatok megoldása előtt célszerű, ha a program indítása után a **Nézet** menüben beállítjuk, hogy a **Tengelyek** és a **Rács** is látható legyen. Sőt ebben a fejezetben az **Algebra ablak**ra is szükség lesz a számítások miatt, ezért ezt is célszerű kijelölni.

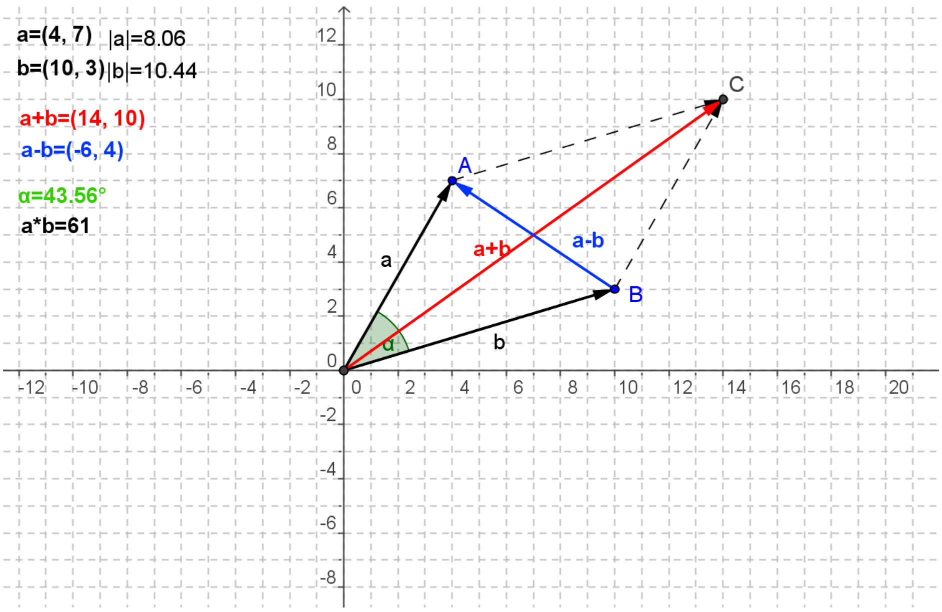
Mint látni fogjuk, ebben a témakörben igen széles körben használható a GeoGebra program. Egyrészt szemléletessé teszi a feladatok megoldását, másrészt megkönnyíti a bonyolult számításokat. Nézzük is meg, hol és miért érdemes a feladatok megoldásánál alkalmazni a programot. A fejezethez tartozó munkalapokat a melléklet **Koordináta-geometria** fejezete alatt találjuk.

8.1. Koordináta-geometria a 10. évfolyamon

A középiskolai tanításban koordináta-geometriával 10. évfolyamban találkoznak a diákok először. Itt ismerkednek meg a vektorok koordinátákkal való leírásával, a helyvektorokkal és a vektorműveletekkel. Továbbá itt találkoznak először pontokkal, felezőpontokkal. Ezek szemléltetésére szolgál a melléklet **Koordináta-geometria 10. évfolyam** fejezet alatti két munkalapja.

8.1.1. Vektorok, vektorműveletek

Az anyagrészhez kapcsolódó mellékletet a Munkalap44: vektorok, vektorműveletek cím alatt találjuk. A munkalapról készült képet az alábbi **51. ábrán** láthatjuk.



51. ábra

A munkalapon az **a** és **b** helyvektorok **A** és **B** végpontja mozgatható, és ezek függvényében kapjuk a két vektor |**a**|, |**b**|-vel jelölt hosszát, **a+b** összegét, **a-b** különbségét, a vektorok által bezárt **α** szöget, valamint az **a·b** skaláris szorzatot.

A munkalap elkészítésének első lépése a vektorok felvétele volt. Vektort, az eltolásnál már megismert módon tudunk felvenni a koordináta-rendszerben, azaz használhatjuk a megfelelő parancsot, vagy ikont. Amennyiben helyvektort szeretnénk felvenni, akkor erre létezik egy külön parancs: **vektor[pont]**, ahol a pont a helyvektor végpontja.

A vektorok hosszát a **hossz[vektor]** parancs segítségével határoztam meg. De megtehettem volna azt is, hogy az eszközsoron a  ikonra kattintva kijelölöm a vektor két végpontját és így az algebra ablakban látható a vektor hossza. A vektorok összegét, különbségét és skaláris szorzatát pedig egyszerűen az aritmetikai műveletekkel oldottam meg. Vagyis a GeoGebra-ban vektorokkal ugyanúgy végezhetünk számításokat, mint a számokkal.

A vektorok által bezárt szög pedig szintén többféleképpen meghatározható, az eddig megismert geometriai módszereken túl, a **szög[vektor, vektor]**, parancs segítségével is. Itt érdemes megjegyezni, hogy a matematika órán a hajlásszög kiszámítása, így a két vektor szögének meghatározása is összetett feladat. Ezt a művelet, mint láttuk egyetlen paranccsal, vagy a megfelelő ikonnal borzasztó egyszerűen meg tudjuk oldani.

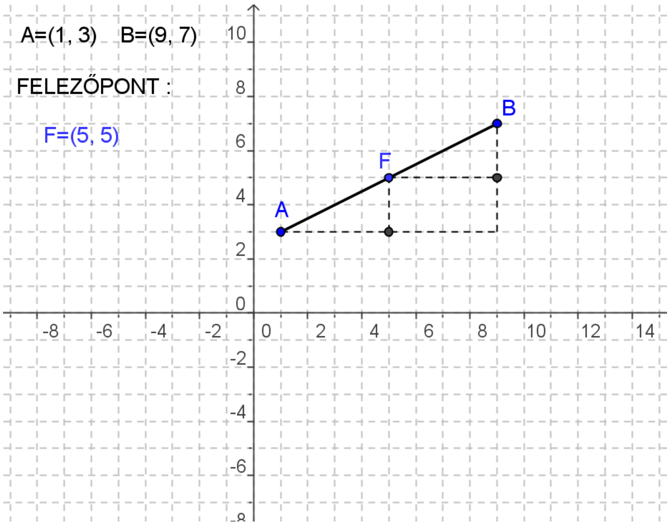
A munkalapon a **Navigációs eszköztár** lépésein lépegetve, vagy a **Lejátszás** gombra kattintva a vektorműveletek szerkesztésének lépéseit láthatjuk, bemutatva az ismert paralelogramma-módszert is. Éppen ezért érdemes ezt az oldalt az új anyag ismertetésénél bemutatni a diákoknak. De használhatjuk a munkalapot akkor is, ha ellenőrizni akarjuk a kitűzött feladatok megoldását is.

8.1.2. Felezőpont, harmadoló pont, súlypont

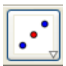
A pontokkal kapcsolatos feladatok bemutatása előtt fontos megemlíteni, hogy a GeoGebra-ban a pontokat nemcsak az egérrel tudjuk kijelölni a rajzlapon, hanem megtehetjük azt is, hogy a parancssorba beírjuk a pont koordinátáit. Pl.: **A=(2,3)**.

A pontokkal kapcsolatos feladatok bemutatására szolgál a szóban forgó melléklet Munkalap45: felezőpont, harmadoló pont, súlypont oldala, ami a címnek megfelelően három feladatot tartalmaz.

A felezőpont kiszámítását segítő munkalap képe látható az alábbi **52. ábrán**.

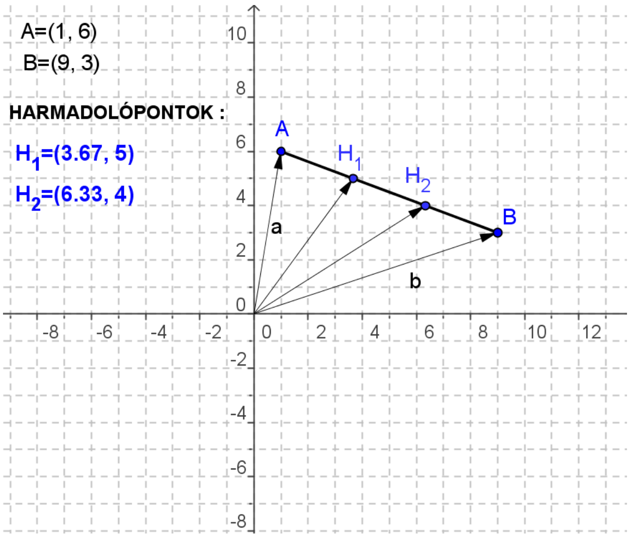


52. ábra

Adott **A** és **B** pontok a rajzlapon tetszőlegesen mozgathatók és ezek függvényében kapjuk a szakasz **F** felezőpontjának koordinátáit.
A felezőpontot megkaphatjuk, ha a parancssorba **középpont[A, B]** vagy **középpont[szakasz]** utasítást írunk, vagy az eszközsoron kijelöljük a  felező vagy középpont ikont és a szakasz végpontjaira kattintunk.

A szakasz harmadoló pontjainak meghatározása már nehezebb feladat. Tekintsük meg az előbbi munkalapot és a következő **53. ábrát**.

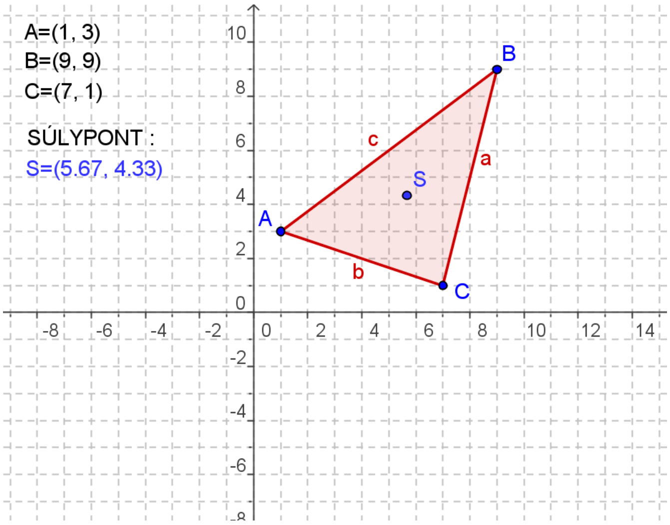
Az rajzlapon az **AB** szakasz végpontjai mozgathatók és ezek függvényében kapjuk a szakasz **H_1**-vel és **H_2**-vel jelölt harmadoló pontjait.
A harmadoló pontokat legegyszerűbben a vektorok segítségével lehet meghatározni.
Ehhez megrajzoltam az **A** és **B** pont helyvektorait, majd a parancssorba a következő utasításokat írtam:



53. ábra

- **H_1=2/3*a+1/3*b**, illetve
- **H_2=1/3*a+2/3*b**.

A háromszög súlypontjának meghatározása a felezőpont meghatározásához hasonlóan, egyszerűen megoldható. Tekintsük a következő **54. ábrát**.



54. ábra

Az **ABC** háromszög csúcspontjai szabadom mozgathatók a munkalapon és ezek helyétől függően kapjuk a háromszög **S** súlypontját.

A háromszög súlypontjának meghatározásához a **súlypont[sokszög]** parancsot használtam. Természetesen ezzel a paranccsal tetszőleges sokszög súlypontja is megadható lenne.

Az előbbi három egyszerű feladat jól mutatja, hogy a koordináta-geometriai feladatok körében is jól használható a program. Az is látható, hogy az előzőhöz hasonlóan alkalmazhatjuk szélesebb körben is. Például készíthetünk olyan munkalapot is, ami egy szakaszt akár 4, vagy 5 egyenlő részre oszt, vagy bármilyen sokszögnek megadhatjuk a súlypontját. Ezek a feladatok leginkább szemléltetésre és a feladatok ellenőrzésére alkalmasak.

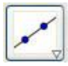
8.2. Koordináta-geometria a 11. évfolyamon

A 11.-es tananyag jelentős részét öleli fel ez az anyagrész. Nagyon sok és változatos feladatot kell megoldani ebben a témakörben a diákoknak, melyek mindegyikénél használhatjuk a programot. Alkalmazhatjuk az egyenesekkel kapcsolatos példáknál, de természetesen a körnél és a kúpszeleteknél is.

Ebben a részben ezeket az alakzatokat veszem sorba, bemutatva hogyan lehet a koordináta-geometriai példáknál a szerkesztéseket és a számításokat összekapcsolni. Fontosnak tartom a munkalapok kivetítését, ugyanis a számítások melletti szemléletes ábrák igen megkönnyítik a munkánkat, hiszen a tanulók hajlamosak elnagyolni a pontos ábrák készítését.

A fejezethez tartozó munkalapok a melléklet **Koordináta-geometria 11. évfolyam** fejezete alatt találhatók.

8.2.1. Az egyenest meghatározó adatok

Az egyenesek megjelenítésére a korábban tárgyaltak szerint több lehetőségünk is van. Mint már láttuk megtehetjük, hogy az egyenest az eszközsor  egyenes ikonjával vesszük fel, vagy a parancssorba beírt **egyenes[A pont, B pont]** paranccsal.

Továbbá eljárhatunk úgy is, hogy az egyenes egyenletét közvetlenül beírjuk a parancssorba. A következő formák megengedettek:

- **e: y=2x+1** vagy **e: -2x+y=1** alak,
- **e: X = (-0.5, 0) + λ (1, 2)** paraméteres forma.

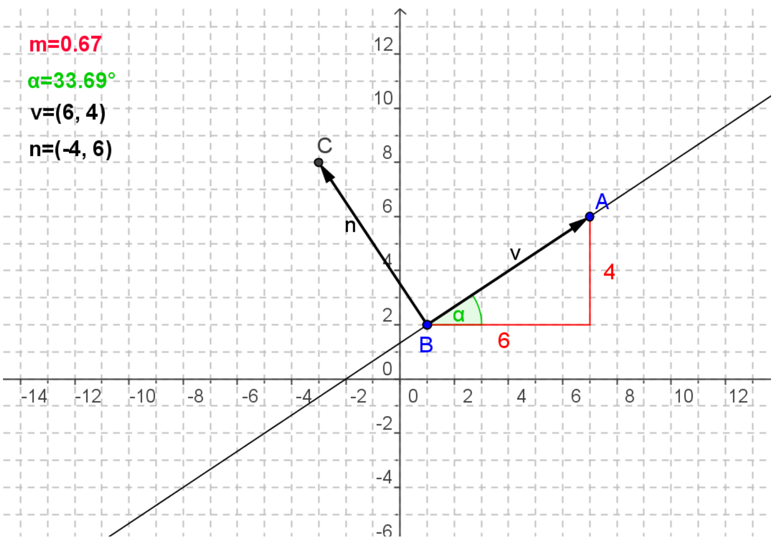
Bármelyik módszerrel vesszük is fel az egyenest, mindegyik esetben az algebra ablakban megkapjuk az egyenes egyenletét, és a geometriai ablakban pedig az egyenes grafikonját.

Ha az egyenes környezeti menüjét választjuk, akkor az egyenes egyenletének alakja (explicit, implicit, paraméteres) megváltoztatható, ugyanúgy mint az egyenes tulajdonságai. Természetesen az egyenes át is nevezhető.

Ha már adott az egyenes a koordináta-rendszerben, akkor az egyenest jellemeznünk is kell. Az egyenesek legfontosabb jellemzőit foglaltam össze a következő munkalapon, melyet a szóban forgó melléklet Munkalap46: az egyenest meghatározó adatok oldal alatt találunk meg. Az oldalról készült képet pedig az alábbi **55. ábrán** láthatjuk.

A munkalapon az egyenes **A** és **B** pontja a rajzlapon mozgatható. Az egyenes elhelyezkedésétől függően kapjuk az egyenest jellemző adatokat:

- **m** meredekséget,
- **α** irányszöget,
- **v** irányvektort,
- **n** normálvektort.



55. ábra

A munkalap elkészítése során először elkészítettem az ábrát a már ismert geometriai módszerekkel. Sőt az egyenes irányszögét is elemi geometriai lépésekkel határoztam meg. Majd az egyenesek további jellemzőinek meghatározásához a következő beépített parancsokat használtam:

- **Meredekség[egyenes]** – megadja az egyenes meredekségét és kirajzol egy meredekségi háromszöget. Az egyenes irányszöge a meredekségből is könynyen kiszámolható lenne, hiszen **m**=tg(α).
- **Irány[egyenes]** – megadja az egyenes egy irányvektorát, ha az egyenes egyenlete **ax+by=c**, akkor az irányvektor **v**=(-b,a).
- **Normálvektor[egyenes]** – megadja az egyenes egy normálvektorát, az előbbi példában **n**=(a,b).

Ha szükséges, akkor megadhatjuk az egyenes egységnyi hosszúságú irányvektorát, és normálvektorát is, az **egységvektor[egyenes]** és **egységnyinormálvektor[egyenes]** parancsokkal.

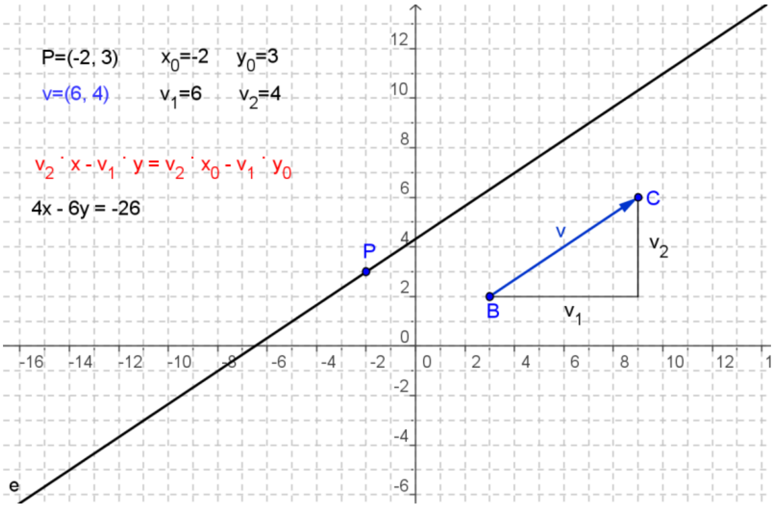
A munkalap az egyenes adatai közötti összefüggést szemlélteti, így jól használható a tanításban az összefüggések megvilágítására. Ha az egyenes **A** és **B** pontját a síkon mozgatjuk, bemutathatjuk az egyenes adatai közötti kapcsolatot. De használhatjuk a munkalapot olyan feladatok megoldására is, amikor adott az egyenes két pontjával, és nekünk kell megadni az egyenest jellemző adatokat. Ilyen feladatoknál inkább csak ellenőrzésre ajánlom a munkalapot.

8.2.2. Egyenes irányvektoros egyenlete

A feladatok másik nagy csoportját alkotják az olyan példák, amikor nekünk kell az egyenes egyenletét meghatározni az egyenest jellemző adatokból. A következő munkalapokon az ilyen típusú feladatokat veszem sorba.

Egyik legegyszerűbb feladat, amikor az egyenesnek az egyenletét az egyenes **v** irányvektorából és egy **P** pontjából kell felírni.

Ennek a problémának a megoldása a melléklet Munkalap47: egyenes irányvektoros egyenlete című oldalon látható. A munkalap geometriai ablakáról készült képet az alábbi **56. ábrán** láthatjuk.



56. ábra

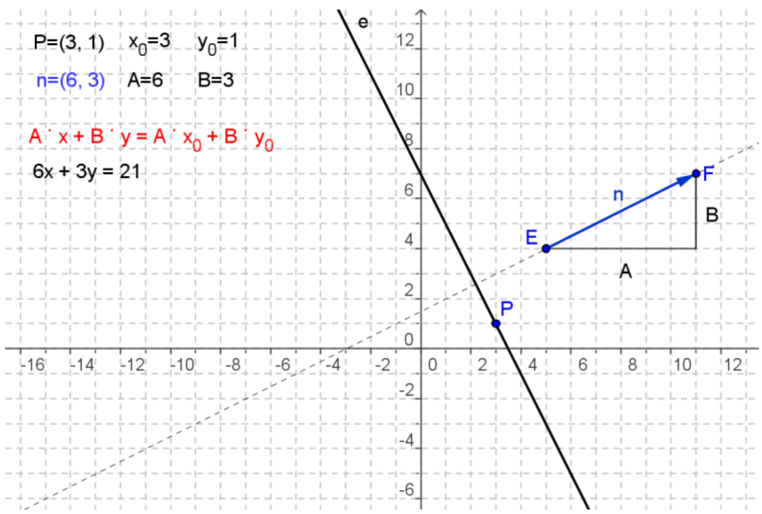
Adott az egyenes **P** pontja és **v̲** irányvektora. A pont is és a vektor is szabadon mozgatható a munkalapon, és ezek függvényében kapjuk az egyenes egyenletét. Nem csak a végeredményt láthatjuk, hanem a képletbe való behelyettesítendő értékeket $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{y_0}$, $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ is.

A feladat megvalósítása során először felvettem a rajzlapon a pontot és a vektort. Ezután a vektorral párhuzamos egyenest illesztettem a pontra az **egyenes[P,v]** parancccsal, de használhattam volna az eszközsor már ismert párhuzamos ikonját is. Végül megformáztam az ábrát és kiírattam az adatokat a rajzlapra. A pont koordinátáinak kiíratásánál a függvényeknél megismert parancsokat: **x(P)**, **y(P)** használtam.

8.2.3. Egyenes normálvektoros egyenlete

Ezeknél a feladatoknál az egyenes **P** pontja mellett az **n̲** normálvektora adott, és ebből kell felírni az egyenes egyenletét. A megoldást a Munkalap48: egyenes normálvektoros egyenlete alatt találjuk meg a mellékletben. A munkalapról készült képet az alábbi **57. ábrán** láthatjuk.

Az egyenes **P** pontja és **n̲** normálvektora a rajzlapon mozgatható. Az egyenes egyenletét ezek függvényében kapjuk.
A munkalapon és itt az ábrán is látjuk a képletbe behelyettesítendő értékeket.

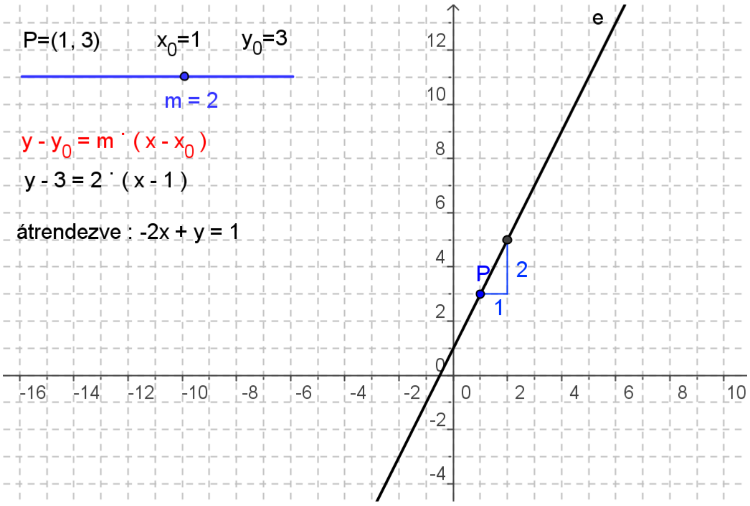


57. ábra

A munkalap létrehozása hasonló az előzőhöz. Felvettem a pontot és a vektort, és az egyenes megrajzolásához a **merőleges[P,n]** parancsot használtam. Természetesen az **n** az egyenes normálvektora. De itt is alkalmazhattam volna az eszközsor eddig is használt merőleges ikonját.

8.2.4. Egyenes iránytangenses egyenlete

Az ilyen példáknál adott az egyenes **P** pontja valamint az egyenes **m** meredeksége. E két adat függvényében kell megadnunk az egyenes egyenletét. A megvalósítást a melléklet Munkalap49: egyenes iránytangenses egyenlete oldalon tekinthetjük meg. Nézzük meg az oldal képét, amit az **58. ábrán** láthatunk.



58. ábra

A **P** pont a munkalapon szabadon mozgatható, míg az **m** meredekség a csúszkán állítható be. A meredekség változtatásával változik a meredekségi háromszög is.

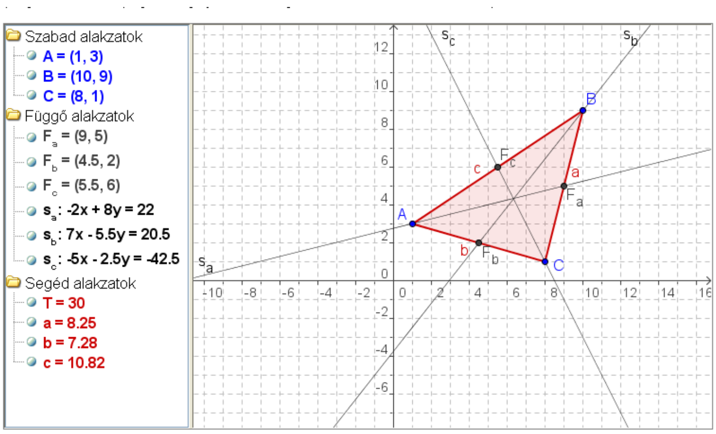
A pont és a meredekség beállításának függvényében kapjuk az egyenes átrendezett, explicit egyenletét.

A feladat megoldásának első lépése a **P** pont és az **m** szám felvétele. Majd az egyenes iránytangenses egyenletébe nem konkrét számokat, hanem a fenti változókat helyettesítettem, vagyis a következő utasítást írtam a parancssorba: **e: y-y(P)=m(x-x(P)).** Ahol **x(P)** parancs a pont x, **y(P)** pedig az y koordinátáját adja vissza.

Összegezve az előző egymáshoz hasonló három munkalapot, elmondható, hogy mindegyik oldal alkalmas az új anyag bemutatására, szemléltetésére. Mindegyik munkalapon le tudjuk játszani a szerkesztés menetét is, megkönnyítve az anyag megértését. A munkalapok segítségével sok, igen gyakori példát tudunk megoldani. Használhatjuk ezeket az oldalakat új feladatok megoldására, de már elkészült példák ellenőrzésére is. Ezért nagyon ajánlom tanároknak és diákoknak is.

8.2.5. Háromszög súlyvonalainak meghatározása

A következő munkalap az eddigiekre épül, új ismeretet nem tartalmaz. Viszont jól mutatja a program nagyszerűségét, mellyel a bonyolult, hosszú számításokat elegánsan, néhány paranccsal, vagy egérkattintással oldhatjuk meg. Valamint láthatjuk a feladatok megoldásához tartozó szép ábrákat. Tekintsük is meg a melléklet Munkalap50: háromszög súlyvonalainak meghatározása oldalt. Valamint nézzük meg az oldalról készült **59. ábrát**.



59. ábra

Adott az **ABC** háromszög csúcsainak koordinátái, melyek a rajzlapon mozgathatók. Ezek függvényében határozzuk meg a súlyvonalak egyenletét!

A feladat megoldását az algebra ablakban leolvashatjuk.

A munkalapon látottak szerint nincs más dolgunk, mint felvenni a háromszöget, majd meghatározni az oldalfelezési pontokat és utána pedig egyenest kell illesztenünk az oldalfelezési pontok és a velük szemben lévő csúcsokra. Az összes szerkesztési lépés elemi geometriai módszerekkel elvégezhető, így nem is részletezem.

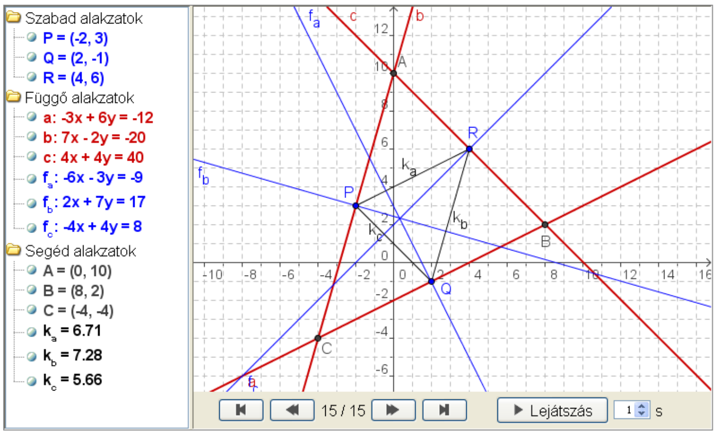
A feladatot azért tartottam fontosnak kiemelni, mert látható, hogy egy összetett koordináta-geometriai példa megoldása is milyen egyszerű a GeoGebra-ban. A szerkesztési lépéseket elvégezve, automatikusan kapjuk a felezési pontok koordinátáit és a súlyvonalak egyenleteit. Éppen ezért ezt a munkalapot csak is a példák ellenőrzésére javaslom, ugyanis ez a megoldás nem helyettesíti a matematika órán tanult hagyományos számítási módszereket.

8.2.6. Háromszög oldal egyeneseinek és oldalfelező merőlegeseinek meghatározása

Az előző példához hasonlóan egy igen sok számítást igénylő feladatot láthatunk a következő munkalapon. A feladat megoldását a melléklet Munkalap51: háromszög oldal egyeneseinek és oldalfelező merőlegeseinek meghatározása oldala tartalmazza. A munkalapról készült képet pedig az alábbi **60. ábrán** nézhetjük meg.

Adott egy háromszög **P**, **Q**, **R** oldalfelezési pontjainak koordinátái. Határozzuk meg a háromszög oldal egyeneseinek és oldalfelező merőlegeseinek egyenletét!

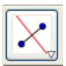
A munkalapon és az ábrán is látható a szerkesztés és leolvasható a megoldás.



60. ábra

A viszonylag bonyolult, sok számítást igénylő feladat megoldása itt is könnyen kivitelezhető. A **PQR** háromszög oldalai az eredeti háromszög középvonalai, ezért a megfelelő oldal egyeneseivel párhuzamosak. Így nincs más teendőnk, mint a középvonalakkal párhuzamos egyeneseket illeszteni a megadott **P**, **Q** és **R** pontokra. Az így megszerkesztett oldal egyenesek egyenlete az algebra ablakban leolvasható. Az oldalfelező merőlegeseket, pedig a már megismert merőleges egyenes szerkesztése módszerrel adtam meg, illesztve az egyeneseket az eredeti oldalfelezési pontokra.

A merőleges egyenesek egyenletét is az algebra ablakban láthatjuk.

Érdemes megemlíteni, hogy a háromszög **A**, **B, C** csúcsait is könnyen meg tudjuk határozni, kijelölve két-két egyenes metszéspontját. Ezután pedig az oldalfelező merőlegeseket meghatározhatjuk, ha a **szakaszfelező[A,B]** parancsot írjuk a parancssorba, vagy az eszközsor  szakasz felező ikonját is használhatjuk**.**

Ezt a munkalapot is javaslom a feladatok ellenőrzésére. Ugyanis ez a példa, akárcsak az előző elég gyakori a koordináta-geometria témakörben. Továbbá használhatjuk ezt a munkalapot szemléltetésre a tanórán, ugyanis a szerkesztés és így a számítás menetét megnézhetjük a **Navigációs eszköztáron** lépegetve, vagy a **Lejátszás** gombot választva.

8.2.7. Kör egyenlete

Elöljáróban megállapíthatjuk, hogy a körrel kapcsolatos feladatoknál is segítségünkre lehet a program. Mind az új tananyag bemutatásában, szemléltetésében, mind az alapfeladatok és összetettebb feladatok megoldásában is.

Valamint jó segédeszköz akkor is, ha csak ellenőrizni szeretnénk a megoldásainkat.

Különösen célszerű ez, a két kör közös pontjainak meghatározásánál, ahol mint tudjuk, másodfokú egyenletrendszert kell megoldanunk.

Első lépésként összefoglalom, hogyan tudunk köröket megjeleníteni a GeoGebra-ban. Legegyszerűbben kört az eszközsor már megismert ikonjaival tudunk rajzolni, de létrehozhatjuk a kört az ikonoknak megfelelő parancsok segítségével is.

Pl.: **kör[O pont, r sugár]** vagy **kör[O pont, A pont].**

Természetesen kör estében is eljárhatunk úgy, hogy parancssorba írjuk a kör egyenletét, a következő formákban:

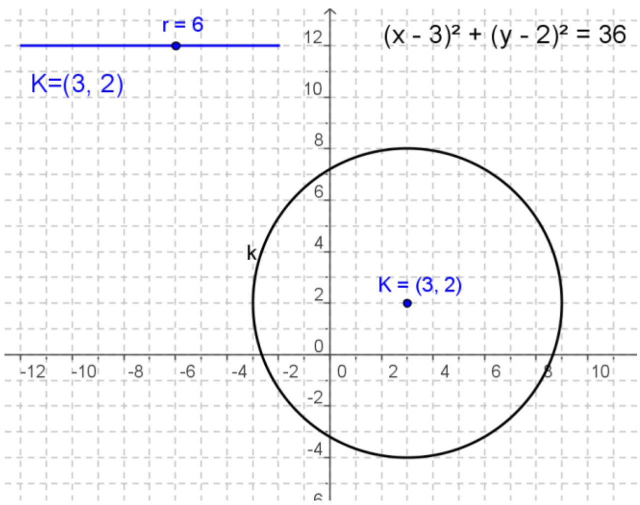
- **k: (x-2)^2+(y+1)^2=25** vagy
- **k: x^2+y^2-4x+2y=20.**

Bármelyik módszert is választjuk, miután meghatároztuk a kört, láthatjuk a geometria ablakban a grafikonját, az algebra ablakban pedig az egyenletét. A kör környezeti menüjében meg tudjuk változtatni a kör egyenlet alakját (általános, vagy kanonikus kör egyenlet) és természetesen a kör grafikonjának tulajdonságait is.

A körrel kapcsolatos feladatok közül az első, magával a kör egyenletével foglalkozik. A feladathoz készült munkalap a kör egyenletének megértésében nyújt segítséget. Nézzük meg a melléklet Munkalap52: kör egyenlete oldalát, valamit a hozzá kapcsolódó **61. ábrát**.

Adott a kör **K** középpontja és **r** sugara. A **K** pont a rajzlapon szabadon mozgatható, míg a kör sugara a csúszkán változtatható.

E két változó függvényében kapjuk az aktuális kör grafikonját és általános egyenletét.



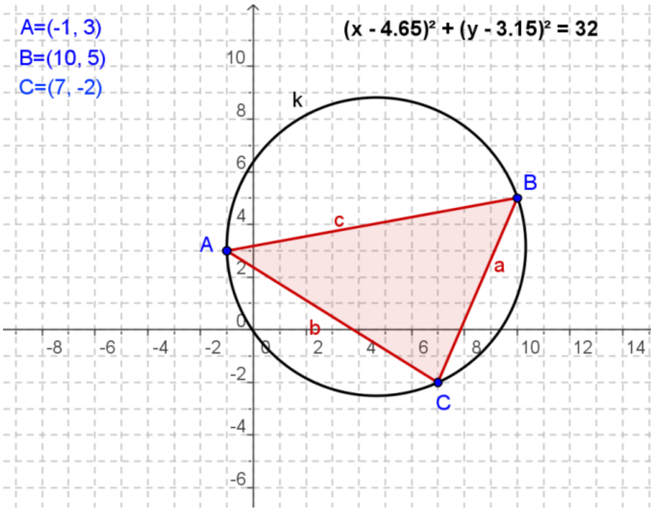
61. ábra

A munkalapon kísérletezve, könnyen megfigyelhető a középpont, a sugár és a kör egyenlet között. Ajánlom ezt a munkalapot az új anyag szemléltetésére a tanórákon.

8.2.8. Háromszög köré írt és beírt köre

A leggyakoribb körrel kapcsolatos feladatok közé tartoznak, a háromszög köré írt és beírt körének a meghatározására vonatkozó példák. Tekintsük a melléklet Munkalap53: háromszög köré írt és beírt köre című oldalát, mely két különálló munkalapból áll.

Az első munkalap a háromszög körülírt körével kapcsolatos és a róla készült képet az alábbi **62. ábra** mutatja.



62. ábra

Adott egy **ABC** háromszög a csúcsok koordinátáival. Határozzuk meg a köré írt kör egyenletét!

A háromszög csúcspontjai a munkalapon mozgathatók és ezek függvényében kapjuk a köré írt kör egyenletét.

A köré írt kör meghatározásához nem szükséges a háromszög oldalfelező merőlegeseit meghatároznunk, majd megkeresni ezek metszéspontját, és a kör sugarát sem kell kiszámítanunk. A GeoGebra-ban ez a matematikailag összetett feladat egyetlen ikonnal, vagy paranccsal megoldható, melyeket a síkgeometria témakörben már ismertettem. Mindegyik módszer esetén megkapjuk a kör grafikonját a rajzlapon, és az egyenletét az algebra ablakban, amit én itt kiírattam a rajzlapra is.

A szóban forgó oldalon található másik munkalap a háromszög beírt körével foglalkozik. Adott egy **ABC** háromszög a csúcsok koordinátáival. Határozzuk meg a beírt kör egyenletét.

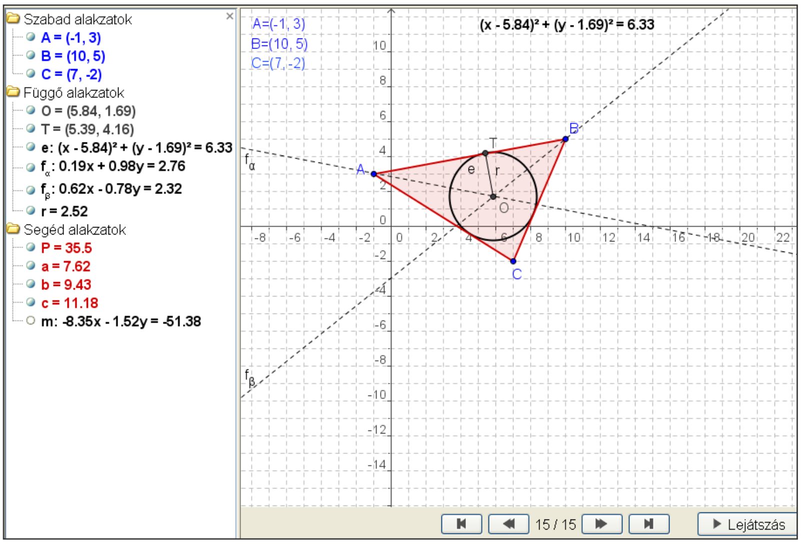
Ez a feladat kissé bonyolultabb mint az előző köré írt körrel kapcsolatos feladat, ugyanis a beírt körre nincsen megfelelő parancs.

A feladat megoldását mutató munkalap képét az alábbi **63. ábra** mutatja.

A munkalapon mozgathatók a háromszög csúcsai.

63. ábra

Ezek függvényében kapjuk a háromszög beírt körének az egyenletét az algebra ablakban és a beírt kör grafikonját a rajzlapon.



A beírt kör középpontját a háromszög szögfelezőinek metszéspontja adja. A szögfelezőket a már ismert módon határoztam meg. Majd a metszéspontot jelöltem ki, és utána a kör sugarát határoztam meg a **távolság[O,a]** paranccsal, ahol **O** a kör középpontja és **a** pedig a háromszög oldala. Természetesen ezt a távolságot az eszközsor

távolság ikonjával is megadhattam volna.

A szerkesztéshez tartozó minden lépés látható a rajzlapon és a szerkesztési lépésekhez tartozó számítások leolvashatók az algebra ablakban. A szerkesztés és a számítás menetét megtekinthetjük, ha a **Lejátszás** gombot választjuk, vagy a **Navigációs eszköztár** lépésein végighaladunk.

Ez a két körrel kapcsolatos munkalap, mint említettem jórészt a koordinátageometriai számítások ellenőrzésére alkalmas. De mint szép szerkesztéseket is bemutathatjuk a diákoknak a matematika órákon.

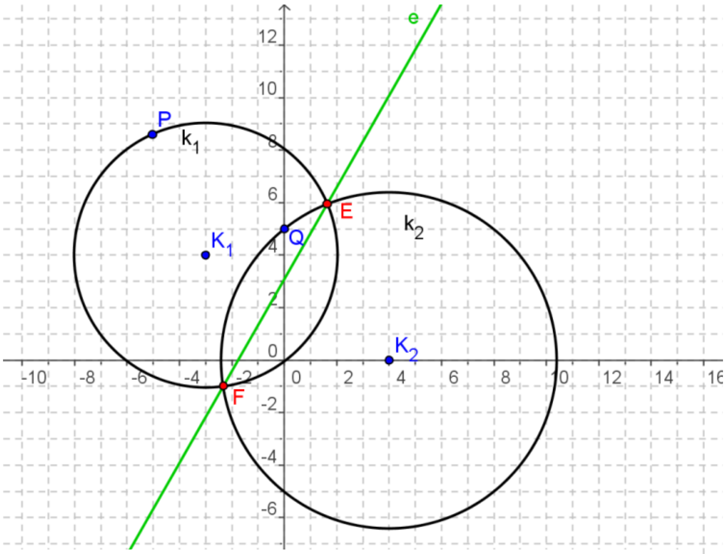
8.2.9. Két kör metszéspontjainak meghatározása, a két kör közös szelője

A feladat szintén tipikusnak mondható a koordináta-geometria témakörben. S mint tudjuk, a két kör metszéspontjait meghatározó számítás a legbonyolultabbak egyike. Mivel itt másodfokú egyenletrendszert kell megoldani, így könnyen elszámolhatjuk. Az ilyen példák ellenőrzésére nagyon ajánlott a GeoGebra programmal történő ellenőrzés.

A feladatot megoldó munkalapot a szóban forgó melléklet Munkalap54: két kör metszéspontjai és közös szelője oldala tartalmazza. Az oldal ábráját az alábbi **64. ábrán** láthatjuk.

A munkalapon mozgathatók a k_1 és k_2 körök. Mindkét kör középpontja és egy-egy kerületi pontjával mozgatható.

Ezen változások függvényében kapjuk a két kör metszéspontjait, valamint közös szelőjüket. Itt az ábrán csak a geometria ablak látható, de a munkalap algebra ablakában leolvashatók az eredmények.



64. ábra

A feladat megoldása nagyon egyszerű, miután felvettem a két kört, kijelöltem a körök metszéspontjait, és az algebra ablakban leolvashatjuk az **E** és **F** pontok koordinátáit. A szelő meghatározása csak annyiból áll, hogy egyenest illesztettem a két metszéspontra és az egyenes egyenlete szintén az algebra ablakban látható.

Amennyiben mozgatjuk a rajzlapon a $\mathbf{k_1}$ és $\mathbf{k_2}$ köröket, változnak a metszéspontok és a szelő egyenlete. Amennyiben nincsen közös pont, akkor az algebra ablakban az **E** és **F** pontok, valamint a szelő **e** egyenlete mellett a **nem definiált** kifejezés jelenik meg.

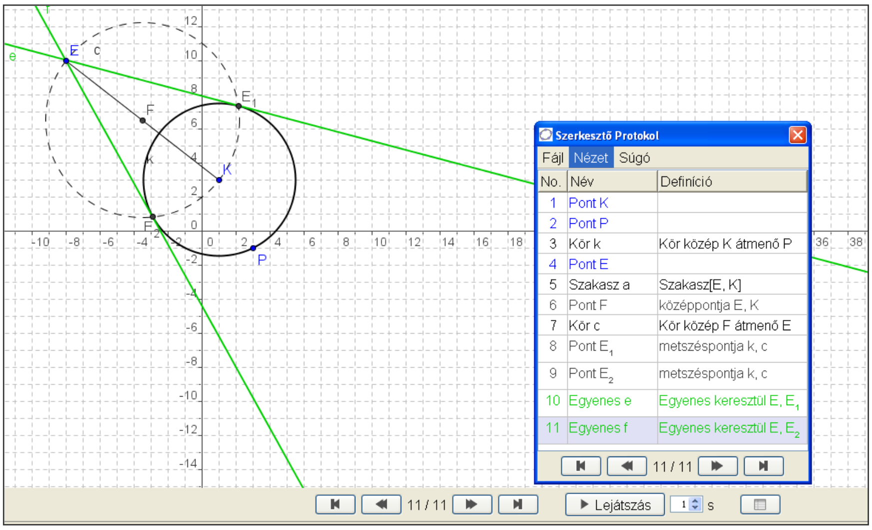
8.2.10. Körhöz külső pontból érintő szerkesztése

Az érintő szerkesztés menetét a melléklet azonos című oldalán mutatom be két különböző munkalapon. Az első munkalap a síkgeometriában megszokott hagyományos szerkesztési lépéseket mutatja be, ami elég sok lépésből áll. Az alatta lévő munkalapon pedig az érintő szerkesztést egyetlen ikonnal vagy paranccsal hoztam létre.

Mindkét munkalapon látszik a **Szerkesztő Protokoll**, így össze is tudjuk hasonlítani a szerkesztés lépéseit, és mindegyik feladat megoldásnál le tudjuk játszani a szerkesztést, amennyiben a **Lejátszás** gombot választjuk.

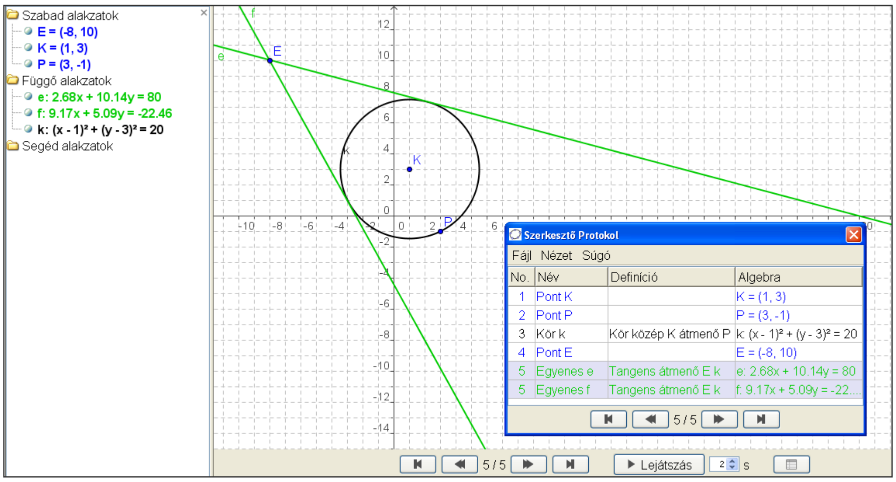
Tekintsük meg a melléklet Munkalap55: körhöz külső pontból érintő szerkesztése oldalt, valamit az oldalról készült **65.** és **66.ábrát**.

A munkalapon mozgatható maga a kör és a külső pont is. Ezek függvényében kapjuk az érintők egyenesét a rajzlapon és az egyenesek egyenletét az algebra ablakban.



65. ábra

A szerkesztés lépéseit a **Szerkesztő Protokoll** mutatja. Ez alapján látható, hogy a feladat megoldása sok szerkesztést és számítást igényel. Meg kellett határoznom az **EK** szakasz **F** felezési pontját, majd felírtam az **EK** szakasz Thalész-körének egyenletét. Utána kijelöltem a két kör metszéspontjait és végül pedig felírtam az érintési pontból a két kör metszéspontjaihoz húzott érintők egyenletét.



66. ábra

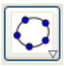
Ezen a munkalapon is mozgatható a kör és a külső pont. Itt is ezek függvényében kapjuk az érintőket és ezek egyenletét.

A szerkesztés lépéseit itt is láthatjuk a **Szerkesztő Protokoll** segítségével. Ebben a megoldásban ezt a több lépésből álló szerkesztést és rengeteg számítást egyetlen paranccsal oldottam meg. Miután megrajzoltam a **k** kört és a külső **E** pontot, a parancssorba az **érintő[E,k]** parancsot írtam és ezzel megkaptam mindkét érintő egyenesét és ezek egyenletét is. Ezzel az utasítással nemcsak körhöz tudunk érintőt szerkeszteni, hanem bármelyik kúpszelethez is.

Az érintő szerkesztést is meg lehet oldani ikon segítségével. Miután az eszközsor  érintők ikonját választjuk utána kijelöljük a rajzlapon az érintési pontot és a kúpszeletet. Vagyis ebben a megoldásban még csak a hagyományos szerkesztési lépéseket sem kell végrehajtani az érintők egyenletének meghatározásához.

Összegezve az eddigi körrel kapcsolatos példák tapasztalatait azt látjuk, hogy a koordináta-geometriában a bonyolult számítások helyett egyszerű geometriai szerkesztéseket kell végeznünk. S a szerkesztések eredményeként megkapjuk a rajzlapon az ábrát és mellette az algebra ablakban az alakzatok egyenletét.
Ajánlom ezeket a példákat a kivetítve szemléltetésre a matematika órákon. Valamint mivel mindegyik munkalap dinamikus, vagyis az alakzatok mozgathatóak, ezért használhatjuk a körrel kapcsolatos példák ellenőrzésére is.

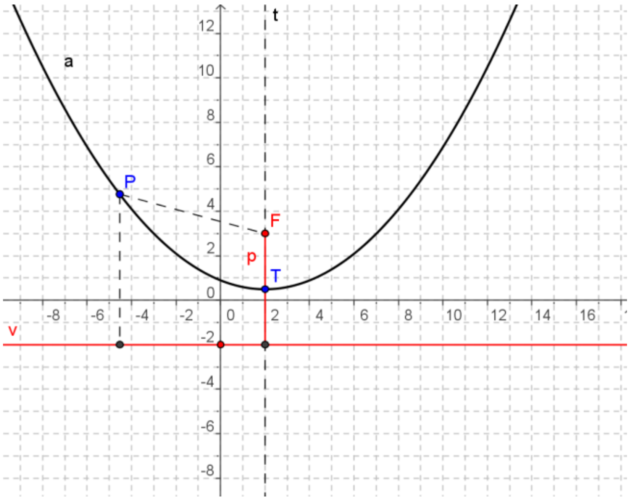
8.2.11. Parabola

A kúpszeletekkel kapcsolatos feladatok megoldásában is sok segítséget kaphatunk, ha használjuk a programot. Ugyanis a kúpszeletek jellemzőinek meghatározására is sok beépített parancs és ikon közül választhatunk.
Ha tetszőleges kúpszeletet szeretnénk rajzolni és ismerkedni a kúpszeletekkel, akkor ajánlom, hogy használjuk az eszközsor  kúpszelet öt ponton keresztül ikonját. Ha megrajzolunk egy kúpszeletet ily módon, akkor a pontok mozgatásával megfigyelhető, hogy a kúpszelet mikor lesz kör, parabola, ellipszis vagy éppen hiperbola. Természetesen ezt az ikont is helyettesíthetjük paranccsal, ekkor a **kúpszelet[A,B,C,D,E]** parancsot kell a parancssorba írni, majd kijelölni az 5 pontot.
Továbbá kúpszeletek megrajzolásánál is megtehetjük azt, hogy a kúpszelet egyenletét beírjuk a parancssorba és így megkapjuk az adott kúpszelet rajzát.
Azonban ha ennél komolyabb feladatokat szeretnénk végezni a programmal, akkor érdemes átnézni, hogy milyen parancsok és ikonok állnak a rendelkezésünkre. Ezeket a konkrét feladatok kapcsán mutatom be a következő munkalapokon.

Először a parabolával kapcsolatos alapfeladatokat vettem sorba. Mivel a parabola egyenlete hozzátartozik a törzsanyaghoz és elég nehéz a diákok számára, ezért több feladatot is készítettem vele kapcsolatban.

A következő munkalapon, melyet a melléklet Munkalap56: parabola oldala alatt találunk, három különböző feladatot oldottam meg.

Feladat1: Adott a parabola **F** fókuszpontja és **v** vezéregyenese. Szerkesszük meg a parabola pontjait.



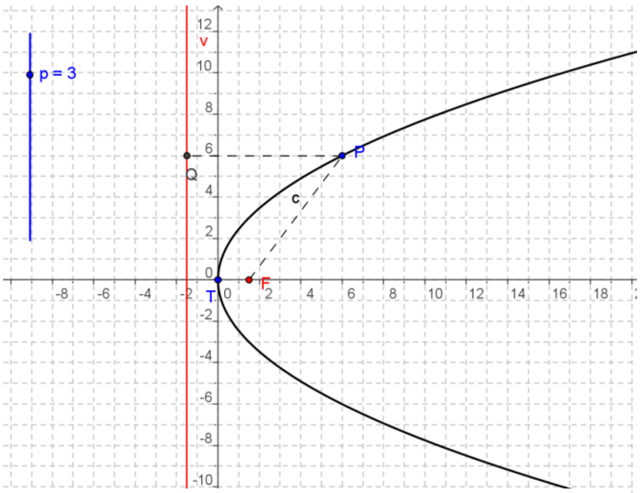
67. ábra

Az első feladatról készült ábrát a **67.ábrán** láthatjuk.

A munkalapon a parabola **F** fókuszpontja és **v** vezéregyenese mozgatható. Ezek függvényében kapjuk a parabola grafikonját, **T** tengelypontját és **p** paraméterét. A **P** pont szintén mozgatható, befutja a parabolát, segítségével leolvashatók a parabola pontjainak koordinátái.

A feladat megoldásának első lépése a fókuszpont és a vezéregyenes felvétele. Majd a parabola pontjait a legegyszerűbb módon, a **parabola[F,v]** utasítással szerkesztettem meg. A parabola tengelypontját és paraméterét elemi geometriai módszerekkel szerkesztettem meg.

Feladat2: Írjuk fel annak az origó tengelypontú parabolának az egyenletét, amelynek adott a **p** paramétere és tengelye párhuzamos az **x** tengellyel. Adjuk meg a parabola **F** fókuszpontját és **v** vezéregyenesét is.



68. ábra

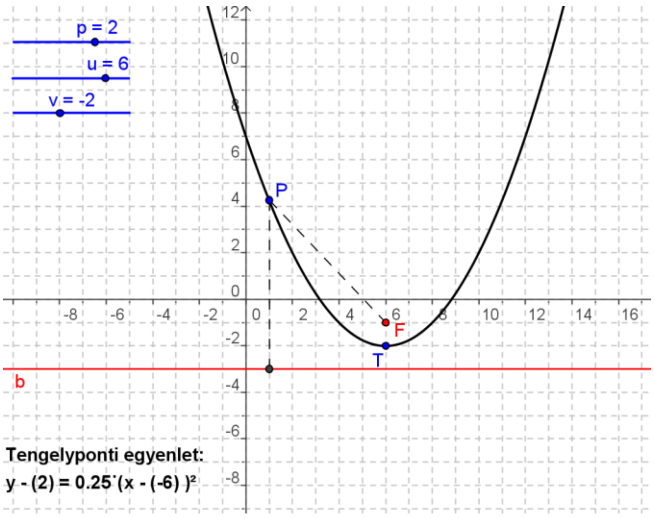
A megoldást a **68. ábrán** láthatjuk.

A munkalapon a parabola **p** paraméterét a csúszkán tudjuk beállítani és ennek függvényében kapjuk a parabola egyenletét, és a parabola jellemzőit.

P mozgatható a munkalapon, befutja a parabolát.

A feladat megoldása a következő lépésekből állt. Először felvettem a csúszkát a **p** paraméternek, majd a parabola megadásakor **a: x=1/(2p)y^2** képletet írtam a parancssorba, ezzel megkaptam a parabola grafikonját. A fókuszpontot a **fókuszpont[a]** és a vezéregyenest a **vezéregyenes[a]** paranccsal határoztam meg.

Feladat3: Adott a parabola **T** tengelypontja és **p** paramétere és tengelye párhuzamos az **y** tengellyel. Írjuk fel a parabola egyenletét és adjuk meg a parabola **F** fókuszpontját és **v** vezéregyenesét is.



69. ábra

A példa megoldását mutató munkalap képét a **69. ábrán** látjuk.

A munkalapon a csúszkán változtatható a **p** paraméter és a tengelypont koordinátái(**u**,**v**). Ezek függvényében kapjuk a parabola grafikonját és tengelyponti egyenletét.

P pont itt is mozgatható a görbén, így leolvashatjuk a parabola pontjainak koordinátáit.

A feladat az előbbi példa általánosítása, ahol a parabola paramétere mellett a tengelypontjának **u**, **v** koordinátája is változtatható.

A megoldás is hasonlít az előbbi példához de itt a parabola egyenletét a következő formulával adtam meg, **a: y–v=1/(2p)(x–u)**.

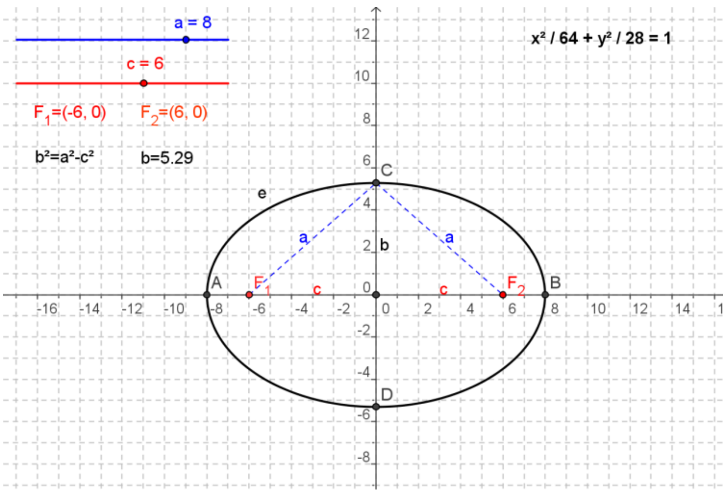
Mindhárom parabolával kapcsolatos feladat alkalmas az új anyag bemutatására. Segítségükkel gyorsan meg tudunk parabolát rajzolni és szemléltetni tudjuk a parabola jellemzőit. De használhatjuk a munkalapokat konkrét feladatok ellenőrzésére is, ugyanis ez a három feladat a parabolákkal kapcsolatos típusfeladatokat magában foglalja. Ajánlom a munkalapok használatát a tanórákon is, de az otthoni tanulásban is segíthet a diákoknak a feladatok megoldásában.

8.2.12. Ellipszis, hiperbola

Ebben a fejezetben következő feladatok nem képezik a koordináta-geometria témakör törzsanyagát. Kiegészítő anyagként szerepelnek a tankönyvben, de én fon-

tosnak tartottam kiemelni. Egyrészt, mert segítségükkel szép és szemléletes munkalapokat lehet készíteni, melyeket be tudunk mutatni az érdeklődő diákoknak, másrészt mert a GeoGebra néhány újabb lehetőségét tudom bemutatni.
Ehhez a fejezethez tartozó munkalapokat a melléklet Munkalap57: ellipszis, hiperbola oldala tartalmazza, mely a két feladatnak megfelelően két önálló dinamikus oldalt tartalmaz.

Feladat1: Adott az ellipszis nagytengelyének hossza: **a,** valamint **F_1(-c,0)** és **F_2(c,0)** az ellipszis fókuszpontjai. Adjuk meg az ellipszis pontjait és egyenletét!



70. ábra

Az ellipszissel kapcsolatos munkalap képét láthatjuk az alábbi **70.ábrán**.

A munkalapon a nagytengely hosszát és a fókuszpontok távolságát is a csúszkán tudjuk szabályozni. (Az ellipszis szerkesztés feltétele **a>c** legyen.)

A feladat kivitelezésénél először felvettem a csúszkákat. Majd az ellipszis pontjainak megrajzolásához az **ellipszis[F_1,F_2,a]** parancsot használtam, ahol **F_1** és **F_2** az ellipszis fókuszpontjai és **a** szám pedig a nagytengely hossza.
Ezután természetesen megformáztam a munkalapot, és a szükséges mennyiségeket kiírattam a rajzlapra. Így a rajzlapon is látható a kistengely **b** hossza, melyet egyszerű számítással határoztam meg.

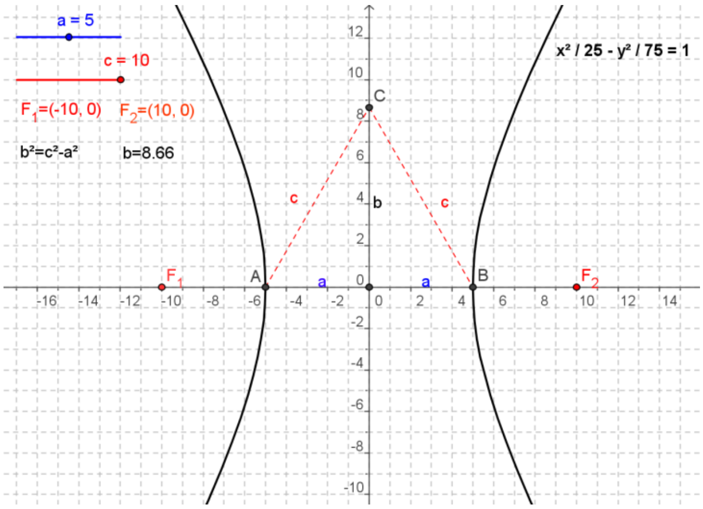
A munkalap alkalmas arra, hogy meghatározzuk az ellipszis egyenletét, a feladat szerint Továbbá az **a** és **c** paraméterek változtatásával megfigyelhetők az ellipszis legfontosabb tulajdonságai.

- **c=0** esetén az ellipszis kör lesz egy fókuszponttal **F(0,0)**,
- **a=c**, akkor egyenest kapunk,
- **a<c** esetén pedig hiperbola lesz az ellipszisből, **b** értéke ilyenkor nem definiált.

Feladat2: Adott a hiperbola valós tengelyének hossza: **a,** valamint **F_1(-c,0)** és **F_2(c,0)** fókuszpontjai. Szerkesszük meg a hiperbola néhány pontját, és adjuk is meg az egyenletét.

A feladat megoldását mutató munkalap képét az alábbi **71. ábrán** láthatjuk.
A dinamikus oldalon a valós tengely hosszát és a fókuszpontok távolságát is a csúszkán szabályozhatjuk.
(A hiperbola szerkesztés feltétele

a<c legyen.)



71. ábra

A feladat kivitelezése nagyon hasonlít az előzőhöz, de itt a hiperbola pontjainak megrajzolásához a **hiperbola[F_1,F_2,a]** parancsot használtam, ahol **F_1** és **F_2** a hiperbola fókuszpontjai és **a** szám pedig a valós tengely hossza. A **b** képzetes tengely hosszát pedig kiszámítottam és a többi adattal együtt kiírattam a rajzlapra.

A hiperbola esetén is az ellipszishez hasonló összefüggéseket megfigyelhetjük, ha változtatjuk az **a** és **c** értékét. Érdemes ezekkel kísérletezni az órán is, de használhatják az érdeklődő tanulók az otthoni tanulásban is.

Összefoglalva, a koordináta-geometria témakörben szinte minden feladatnál tudjuk alkalmazni a GeoGebra programot. Ez az a témakör, amikor a szerkesztések mellett a számítások is fontos szerepet játszanak, tehát a geometria ablak szerkesztése mellett az algebra ablakban leolvashatjuk az eredményeket.
Nagy segítség a program az új anyag tanításában, megértésében, szemléltetésében. Megkönnyíti a számításokat, segít a konkrét feladatok megoldásában, ellenőrzésében is.

Befejezés

Pólya György egyik írásában a matematikatanárt egy „jó árus"-hoz hasonlította, azaz olyannak kell lennie, aki a portékáját el tudja adni a vevőnek, azaz a diáknak. Vagyis fontos feladatunk, nekünk matematikát oktató tanároknak is a motiváció felkeltése, kialakítás és fenntartása. A motiváció a didaktikában alapelv, s rengeteg formája létezik. A számítógéppel segített oktatás mindenféleképpen rendelkezik ilyen motiváló hatással.

Korunkban már minden tantárgyhoz létezik olyan program, amivel az adott tantárgy tanítását tehetjük szemléletesebbé és színesebbé. Így a matematika oktatásában is több segédprogram közül választhatunk. Rendkívül fontosnak tartom, hogy minden matematikát oktató tanár rendelkezzen bizonyos informatikai ismeretekkel és tudjon használni legalább egy matematikai szoftvert.

Kifejezetten ajánlom a dolgozatban bemutatott GeoGebra programot, melynek megismerése és alapszintű használata nem jelenthet gondot sem a tanároknak sem a matematikát tanuló diákoknak sem.

Előbbi állításomat, a gyakorlatban kipróbáltakra építem. Ugyanis az iskolában, ahol tanítok kaptam egy laptopot és egy projektort, amit csak én használok. Így bármelyik órán használhatom. Informatika órákon rendszeresen vetítek és így magyarázok, de matematika órán is egyre gyakrabban használom.

Például a koordináta-geometria témakörben többször is szemléltettem vele a feladatok megoldását, nagy sikerrel. Kifejezetten tetszett a diákoknak és érdeklődőek voltak a témában. Volt olyan osztály, ahol néhány informatika órát szántam a program megismerésére. Ebbe az osztályba járó diákok otthon is letöltötték a programot és használták az otthoni tanulásban.

Továbbá a matematika szakos kollégáim is látták már, hogy használom a mindennapi munkában a GeoGebra-t és kérték, hogy mutassam be nekik a programot és tartsak nekik bemutatóórát.

Tapasztalatom az, hogy a GeoGebra program az emberek többségének nagyon motiváló, attól függetlenül, hogy használt-e már másik hasonló matematikai szoftvert, vagy sem. A diákokra hat az újdonság erejével, a tapasztaltabb kollégákra pedig a sokoldalúságával és könnyű kezelhetőségével is.

Így voltam vele én is. Korábban a Maple-t és ritkán a Cabri-t használtam, mióta megismertem, már csak a GeoGebra-t alkalmazom. Teszem ezt a mindennapi munká-

ban, példák megoldásakor, feladatok ellenőrzésekor. De a dolgozat feladatok összeállításánál is. Előre kipróbálom a program segítségével a feladatokat. Ha nem megfelelő az eredmény, akkor könnyen tudok változtatni a bemenő értékeken.
Természetesen a dolgozat feladatai során, ha kell akkor az ábrákat is a GeoGebra-val készítem és ezt másolom le a diákoknak. A pótvizsga feladatsorokat is így állítottam össze, párhuzamosan a megoldásokkal.

Összegezve, mióta megismertem a programot, egyre többet használom a saját munkámban és gyakrabban szemléltetek a matematika órán a diákoknak is. Ha egy kissé megismernék a kollégáim ezt a remek programot, akkor biztosan tudom szívesen használnák ők is, és ez nagyban megkönnyítené az ő munkájukat is.

Végül, de nem utolsósorban, szeretnék köszönetet mondani konzulensemnek Papp-Varga Zsuzsanna tanárnőnek, aki megismertetett a GeoGebra programmal, lelkesedésével motivált, instrukciókkal látott el és végig figyelemmel kísérte és támogatta munkámat.

Irodalomjegyzék

Sulik Szabolcs: **GeoGebra 2.5 kézikönyv** (2006)

Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urbán, Vincze: **Sokszínű matematika 9** (Mozaik Kiadó Szeged 2005)

Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urbán, Vincze: **Sokszínű matematika 10** (Mozaik Kiadó Szeged 2005)

Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urbán, Vincze: **Sokszínű matematika 11** (Mozaik Kiadó Szeged 2005)

Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urbán, Vincze: **Sokszínű matematika 12** (Mozaik Kiadó Szeged 2005)