KINTLI LAJOS
gimnáziumi tanuló
Zrínyi Miklós Gimnázium, Zalaegerszeg

A π meghatározása számítógéppel

Megjelent: A Matematika Tanítása, 33. évfolyam, 4. szám, 121.–124. old. (1986. augusztus)

A π a kör kerületének és átmérőjének az arányaként került be a matematikába. Értékének egyre pontosabb meghatározása izgalmas történet, amelyet részletesen ismertet [1] és [2]. Ebben a folyamatban különösen nagy előrelépést jelentett a számítógépek megjelenése. Az 1. táblázatban láthatók az érdekesebb eredmények, s ma már a π értékét több, mint 2 millió tizedesjegyre ismerjük [3].

Dátum	Számítógép	Számítási idő	A számított	A pontos
			tizedesjegyek száma	
1949	ENIAC	70 h	2 040	2 037
1954	NORC	13 m	3 093	3 092
1958	IBM 704	1 h 40 m	10 000	10 000
1961	IBM 7090	8 h 43 m	100 265	100 265
1967	CDC 6600	28 h 10 m	500 000	500 000
1973	CDC 7600	23 h 18 m	1 001 250	1 001 250
1981	FACOM M200	137,3 h	2 000 040	2 000 036
1983	MELCOM COSMO 900	7 h 14 m	2 097 152	2 097 152

1. táblázat

Bár ezzel a fantasztikus eredménnyel nem kelhetünk versenyre, az iskolaszámítógéppel is megkísérelhetjük a π meghatározását. Az eddig megjelent próbálkozások azonban (lásd például [4]-et) meglehetősen lassan konvergáló módszereket ajánlottak, amelyeknek történeti érdekességükön túl nem volt más hasznuk. Az alábbiakban egy olyan módszert szeretnék ismertetni, amellyel akár több ezer tizedesjegyre is meghatározhatjuk a π-t.

Az 1. táblázatban felsorolt számítások legtöbbje az arc tg x hatványsorát használja fel (lásd például [5]-ben):

(1) $$arc\ tg\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \pm \ldots$$

ahol $n \in \mathbf{N}$. Ez a sor $x \le 1$ esetén konvergens. $x = 1$ helyettesítéssel megkapjuk az ismert Leibniz-féle összefüggést:

(2) $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Ennek, s a cikkben szereplő egyéb, a középiskolai anyagon túlmutató ismeretnek elegáns levezetése [6]-ban található meg.

Sajnos a (2) sor sem konvergál túl gyorsan. Ezen úgy segíthetünk, hogy a $\pi/4$-et több szög öszszegeként írjuk fel. Az általam írt program a következő felbontást használja:

(3) $$\frac{\pi}{4} = arc\ tg\ \frac{1}{2} + arc\ tg\ \frac{1}{3}\ ,$$

amely a szögek összegének tangensére vonatkozó azonosság alapján könnyen belátható. Ekkor (1)-et az $x = 1/2$ és $x = 1/3$ helyettesítésekkel kell felírni. A számlálók nullasorozatokat alkotnak, ezért a konvergencia gyorsabb lesz. A (3)-hoz hasonló jellegű felbontásokat könnyen találhatunk. Az

1. táblázatban megemlített számítások még több, s ezért kisebb szögek összegeként írták fel a $\pi/4$-et a konvergencia gyorsítása érdekében.

A számítógép természetesen csak véges sok tagját veszi figyelembe a sornak, s a műveleteket is csak korlátozott pontossággal végzi el. A hibát a következőképpen becsülhetjük meg. Legyen

(4) $$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

[6] alapján:

(5) $$R_a = \left| arc\ tg\ \frac{1}{a} - S_n\left(\frac{1}{a}\right) \right| < \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{2n+1},$$

ahol $a = 2$ vagy 3.

A gépi számítás során ehhez még hozzáadódik a műveletek elvégzésének hibája. Ha a gép k tizedesjegy pontossággal számol, akkor az n számú tag miatt:

(6) $$R_a < \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{2n+1} + n \cdot 10^{-k}.$$

A számítógép a számolás során annyi tagot veszünk figyelembe, hogy teljesüljön az

(7) $$\frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{2n+1} < 10^{-k}$$

egyenlőtlenség. Ezért

(8) $$R_a < (n+1) \cdot 10^{-k},$$

és felhasználva, hogy az $x \to \lg\ x$ függvény szigorúan monoton növekvő, (7)-ből következik:

(9) $$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k}{\lg\ a+1} - 1\right) < n.$$

Az ilyen n-ek közül már a legkisebb is megfelel, ezért

(10) $$n \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k}{\lg\ a+1} - 1\right) + 1 \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k}{\lg\ 2+1} + 1\right).$$

A π hibája (3) és (8) alapján:

(11) $$\Delta\pi < 8 \cdot (n+1) \cdot 10^{-k}.$$

Ebből (10) felhasználásával:

(12) $$\Delta\pi < \left(\frac{4k}{\lg\ 2+1} + 12\right) \cdot 10^{-k}.$$

Ez azt jelenti, hogy a szám végén legfeljebb $\lg\left(\frac{4k}{\lg\ 2+1} + 12\right)$, pontosabban $\left[\lg\left(\frac{4k}{\lg\ 2+1} + 12\right)\right] + 1$ értéktelen tizedesjegy áll, ahol […] a benne lévő szám egészrészét jelöli. A számítógép memóriája korlátozza a kezelhető tizedesjegyek számát, ezért $k < 4000$, tehát az értéktelen tizedesjegyek száma legfeljebb 5. (Az új, 64K memóriával rendelkező gép esetén $k < 14\,000$.)

Bár megfelelő szubrutinok segítségével az iskolaszámítógép képes lehet több száz vagy ezer jegyből álló számok kezelésére, ez azonban BASIC-ben igen lassú lenne. A programot ezért gépi kódban írtam meg. Így is szükség volt a több ezer jegyű számokkal műveleteket végző szubrutinokra. Az eredményt pedig át kellett alakítani kettesből tízes számrendszerbe, és gondoskodni a megfelelő megjelenítéséről.

A program induláskor bekéri a k értékét. Mivel az eredmény a képernyőre kerül, ezért a k a memória kapacitásától függetlenül legfeljebb 1010 lehet. Ez a korlátozás azonban printer használatával könnyen feloldható. Egy futás eredménye a 2. táblázatban*, a különböző futások időtartama, s [3] alapján a kapott értékes jegyek száma a 3. táblázatban látható. (Az időt a π számítását végző géppel összekapcsolt másik számítógép mérte.) A programot minden érdeklődőnek szívesen elküldöm.

2. táblázat

3.14159	26535	89793	23846	26433	: 1— 25
83279	50288	41971	69399	37510	: 26— 50
58209	74944	59230	78164	06286	: 51— 75
20899	86280	34825	34211	70679	: 76— 100
82148	08651	32823	06647	09384	:101— 125
46095	50582	23172	53594	08128	:126— 150
48111	74502	84102	70193	85211	:151— 175
05559	64462	29489	54930	38196	:176— 200
44288	10975	66593	34461	28475	:201— 225
64823	37867	83165	27120	19091	:226— 250
45648	56692	34603	48610	45432	:251— 275
66482	13393	60726	02491	41273	:276— 300
72458	70066	06315	58817	48815	:301— 325
20920	96282	92540	91715	36436	:326— 350
78925	90360	01133	05305	48820	:351— 375
46652	13841	46951	94151	16094	:376— 400
33057	27036	57595	91953	09218	:401— 425
61173	81932	61179	31051	18548	:426— 450
07446	23799	62749	56735	18857	:451— 475
52724	89122	79381	83011	94912	:476— 500
98336	73362	44065	66430	86021	:501— 525
39494	63952	24737	19070	21798	:526— 550
60943	70277	05392	17176	29317	:551— 575
67523	84674	81846	76694	05132	:576— 600
00056	81271	45263	56082	77857	:601— 625
71342	75778	96091	73637	17872	:626— 650
14684	40901	22495	34301	46549	:651— 675
58537	10507	92279	68925	89235	:676— 700
42019	95611	21290	21960	86403	:701— 725
44181	59813	62977	47713	09960	:726— 750
51870	72113	49999	99837	29780	:751— 775
49951	05973	17328	16096	31859	:776— 800
50244	59455	34690	83026	42522	:801— 825
30825	33446	85035	26193	11881	:826— 850
71010	00313	78387	52886	58753	:851— 875
32083	81420	61717	76691	47303	:876— 900
59825	34904	28755	46873	11595	:901— 925
62863	88235	37875	93751	95778	:926— 950
18577	80532	17122	68066	13001	:951— 975
92787	66111	95909	21642	01976	:976—1000

Shancks angol matematikus a XVIII. században 30 évi munkával számította ki a π 707 tizedesjegyét (ráadásul eredménye az 528. tizedestől kezdve téves volt). Az egyik legelső számítógép, az ENIAC 1949-ben 70 óra alatt 2000 tizedesjegyet határozott meg. A számítástechnika viharos gyorsaságú fejlődését jelzi, hogy ma már szinte bárki ezzel összemérhető nagyságrendű eredményt érhet el.

A π meghatározása próbára tette matematikai és számítástechnikai ismereteimet. A feladat megoldása közben nyújtott bátorításért és értékes segítségért szeretnék köszönetet mondani Juhász Tibor tanár úrnak; Orbán Edit tanárnőnek és Horváth Attila tanár úrnak pedig azért, mert felkeltették bennem az érdeklődést a számítástechnika iránt.

* A táblázatot a folyóiratban megjelent cikkből másoltuk ide.

Számított tizedesjegyek száma (k)	Számítási idő	Pontos tizedesjegyek száma
10	2 s	9
20	5 s	18
50	28 s	48
100	2 m 58 s	97
200	23 m	198
500	5 h 6 m	498
1000	40 h 9 m	998

3. táblázat

Irodalom

[1] F.T. CIMPAN: *A π története*. Kolozsvár, 1971, Albatrosz Kiadó.

[2] SAIN MÁRTON: *Matematikatörténeti ABC*. Budapest, 1984, Tankönyvkiadó, 193.–194. oldal.

[3] Y. TAMURA: *Calculation of Pi to 2 Million Decimals*. Proceedings of the International Latitude Observatory of Mizusawa, No. 22, 1983., 59.–90. oldal.

[4] SIMONOVITS MIKLÓS: *Számítástechnika a speciális matematikai osztályok részére*. Budapest, 1985, Tankönyvkiadó, 167.–174. oldal.

[5] G.A. KORN–T.M. KORN: *Matematikai kézikönyv műszakiaknak*. Budapest, 1975, Műszaki Könyvkiadó, 867. oldal.

[6] LÉVÁRDI L.–SAIN M.: *Matematikatörténeti feladatok*. Budapest, 1982, Tankönyvkiadó, 160.–162. oldal.