A Kunfalvi Rezső olimpiai válogatóverseny 0. feladata

Az idei válogatóversenyt, amelyen eldőlt, hogy ki az az öt diák, aki nyáron részt vehet a Nemzetközi Fizika Diákolimpián, április 10–12. között rendezték Budapesten, a BME-n és az ELTE-n. A verseny általában becslési versennyel kezdődik, idén azonban egy 0.

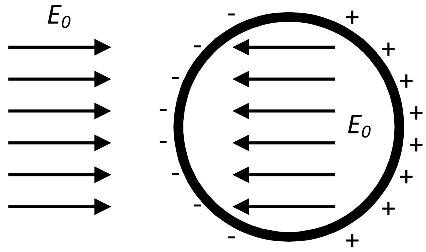
„bemelegítő” feladatot kaptunk. A feladat megoldásához néhány furfangos, nehéz ötletre volt szükség.

A feladat:

Egy R sugarú, vékonyfalú, $d \ll R$ falvastagságú, ϱ fajlagos ellenállású, töltetlen, $L \gg R$ hosszúságú fémcsövet a szimmetriatengelyére merőleges irányú, homogén E_0 elektromos térbe helyezünk. A csövet szimmetriatengelye körüli állandó ω szögsebességgel forgatjuk. Mekkora a csőben fejlődő Joule-hő teljesítménye? Tekintsük úgy, hogy a fémcső falában sugárirányban a töltéselrendeződés egyenletes.

Megoldás:

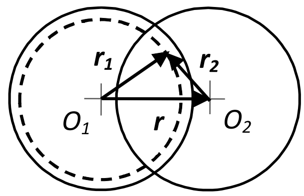
A fémek belsejében elektrosztatikus állapotban nincs térerősség. Ezért, ha a fémcsövet elektromos térbe helyezzük, a fémben úgy kell elmozdulniuk az elektronoknak, hogy az általuk a fém belsejében létrehozott térerősség kioltsa a külső térerősséget az ábrán látható módon. Miután a hengert megforgatjuk, a kialakuló töltéseloszlás nem mozdulhat el, a fémcső belsejében csak így marad erőtérmentes állapot. A henger viszont elfordul, azaz a hengerhez képest a töltések visszafelé forognak. Ez a hengerben áramot jelent. Ha meghatározzuk a töltéseloszlást, akkor meghatározhatjuk az áram teljesítményét is. A homogén erőtér előállítására használjuk a következő ötletet. Tekintsünk két ellentétes, de egyforma nagyságú σ térfogati töltéssűrűségű, R sugarú hengert!



A Gauss-tétel segítségével megmutatható, hogy a hengerekben a térerősségnek a középponttól való távolságfüggése:

$$\vec{E}_{\pm}(r_i) = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{r_i}$$

Az O_1 középpontú hengerben az $\vec{E}_{\pm}(r_1)$ térerősség előjele pozitív, mivel ezen a hengeren pozitív a töltéssűrűség, az O_2 középpontú hengerben ellenkezőleg. A két henger közös részében a térerősség a két kiszámolt térerősség összege:



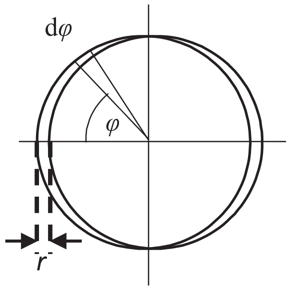
$$\vec{E} = \vec{E}_{+}(r_1) + \vec{E}_{-}(r_2) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot (\vec{r_1} - \vec{r_2}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{r}$$

Látható, hogy a hengerek közös részében homogén térerősség jön létre. Ezen térerősség nagysága E_0 kell legyen, a feladat elején megállapítottak miatt. Ha a hengerek középpontját egyre közelítjük egymáshoz, a közös térrészben lévő térerősséget akkor is a fenti képlet adja meg. A feladatban szereplő eredeti fémhengert úgy modellezhetjük, ha az előbbi elrendezésünkben r-t „nagyon kicsire” választjuk. A közös térrészben a töltések kioltják egymást, a térfogati töltéseloszlás felületi töltéseloszlásba megy át.

Az előző egyenletből kifejezhetjük a felületi töltéssűrűséget, ha a térfogati töltéssűrűséget megszorozzuk a falvastagsággal. Felhasználva, hogy r kicsi, és felírva két koszinusztételt megmutatható, hogy a falvastagság tetszőleges φ szögnél $r \cdot \cos\varphi$. Ennek felhasználásával a felületi töltéssűrűség:

$\lambda = \sigma \cdot r \cos\varphi = 2\varepsilon_0 E_0 \cdot \cos\varphi$.

Az áramerősség az adott keresztmetszeten egységnyi idő alatt átfolyó töltés. Az ábra szerint a φ szögre lévő felület nagysága



$\Delta A = L \cdot R \cdot \mathrm{d}\varphi$,

az ezen a felületen lévő töltések száma $\Delta Q = \lambda \cdot \Delta A$, és felhasználjuk, hogy $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$, továbbá egyenletes forgáskor $\varphi = \omega t$:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\lambda \cdot L \cdot R \cdot \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 2\varepsilon_0 E_0 \cdot L \cdot R \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

Hőhatás szempontjából a szinuszosan (koszinuszosan) változó áram effektív jellemezhető, melynek nagysága $I_{eff} = I_{max}/\sqrt{2}$. A henger ellenállása:

$$R_{ell.} = \varrho \cdot \frac{l}{A} = \varrho \cdot \frac{2R\pi}{L \cdot d}$$

A fejlődő hőteljesítmény pedig:

$$P = R_{ell.} \cdot I_{eff}{}^2 = \varrho \cdot \frac{2R\pi}{L \cdot d} \cdot 2\varepsilon_0{}^2 E_0{}^2 \cdot L^2 \cdot R^2 \cdot \omega^2 = \frac{4\pi\varepsilon_0{}^2 \varrho R^3 L \omega^2 E_0{}^2}{d}$$

A feladat megoldására 2 óra állt rendelkezésre. Mint később örömömre kiderült, a jó megoldást adók közt voltam. A feladat megoldása a kezdő lökés mellé elég önbizalmat adott az előttem álló két és fél napra az igazi megmérettetéshez, az olimpián megszokott típusú elméleti és mérési feladatokhoz. A verseny során még rengeteg érdekes és nehéz feladattal találkoztunk, de nekem a 0. feladat maradt az, amelyre a legbüszkébb vagyok.

Nagy Botond 12.A

Tanára: Pálovics Róbert