

# A g r a v i t á c i ó



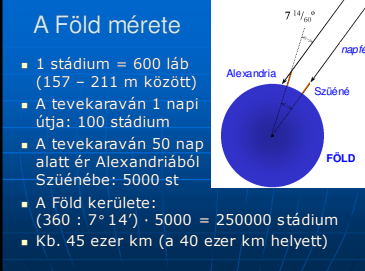
Összeállította:  
Juhász Tibor  
- 2004 -

## A Föld mérete




- Eratoszthenész, i.e. III. század
- Szüénében és Alexandriában a nyári napforduló idején nem ugyanolyan irányban látszik a Nap!
- Azonos délkörön vannak.

## A Föld mérete



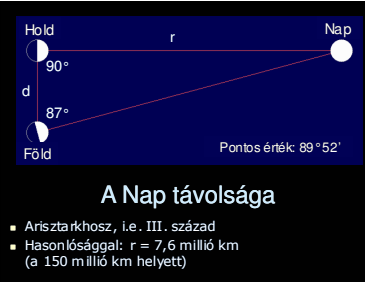
- 1 stádium = 600 láb (157 - 211 m között)
- A tevekaraván 1 napi útja: 100 stádium
- A tevekaraván 50 nap alatt ér Alexandriából Szüénébe: 5000 st
- A Föld kerülete:  $(360 : 7^\circ 14') \cdot 5000 = 250000$  stádium
- Kb. 45 ezer km (a 40 ezer km helyett)

## A Hold távolsága



- Hipparkhosz, i.e. II. század
- Holdfogyatkozás: a Föld árnyékának íve
- A Hold átmérője kb. harmada a Földének (valójában: 0,27)
- Távolsága 33 földátmérő (valójában: 30,2 földátmérő)

## A Nap távolsága



- Arisztarkhosz, i.e. III. század
- Hasonlósággal:  $r = 7,6$  millió km (a 150 millió km helyett)

## A Nap mérete

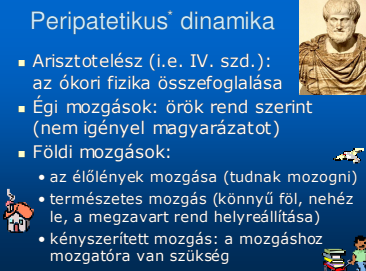


- Arisztarkhosz: a Nap látószöge  $2^\circ$
- A távolságból a méret meghatározható
- 7-szer akkora, mint a Föld
- **Akkor miért a Föld kering a Nap körül???**

Valódi értékek:

- látószög:  $0,5^\circ$
- méret: 103-szor akkora, mint a Föld

## Peripatetikus\* dinamika



- Arisztotelész (i.e. IV. szd.): az ókori fizika összefoglalása
- Égi mozgások: örök rend szerint (nem igényel magyarázatot)
- Földi mozgások:
  - az élőlények mozgása (tudnak mozogni)
  - természetes mozgás (könnyű föl, nehéz le, a megzavart rend helyreállítása)
  - kényszerített mozgás: a mozgáshoz mozgatóra van szükség


Peripatetikus dinamika	Newtoni dinamika
a mozgás fenntartásához erőre van szükség	a mozgás(állapot) megváltoztatásához erőre van szükség
$v \sim F$	$\Delta v/\Delta t \sim F$
a mozgató az erő irányában van	a „mozgató” a gyorsulás irányában van
$F = 0 \Rightarrow v = 0$	$F = 0 \Rightarrow v = \text{áll.}$
$F = \text{áll.} \Rightarrow v = \text{áll.}$	
a mozgás folyamat	a mozgás állapot

## Égi fizika



- Ptolemaiosz (i.sz. II. szd.)
  - a bolygómozgás leírása a geocentrikus világkép alapján
  - epiciklusok
  - 55 kristálygömb
- Csillagjósolás
- XV.-XVI. század: egyre jelentősebb eltérések (gravitáció!)

### Kopernikusz (1473 – 1543)



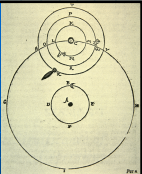
- 1500 körül: az epiciklusok elvetése: „az égitestek a maguk tökéletességében csak tökéletes körpályákon mozoghatnak”
- Ellentét a geocentrikus világgéppel
- 1543 (halálának éve): *Az égi pályák körforgásáról heliosztatikus világgép*
- Ellentét a megfigyelésekkel!

### Tycho Brahe (1546 – 1601)




- A távcső előtti kor utolsó nagy csillagásza.
- Megfigyelések Uraniborgban (ég kapuja).
- Parancsoló, fölényes modor, párbaj.
- Aranyot követelt az ezüst helyett.
- II. Frigyes halála után Prágába ment.
- A szigetiekök szétverték a műszereket, földig rombolták az épületeket.
- Sírja a Tyn-templomban van.

### Brahe világgépe




- A Föld a világegyetem középpontja, nyugalomban van
- A Föld körül kering a Hold és a Nap
- A bolygók a Nap körül keringenek
- Geoheliosztatikus világgép
- „Az ég nem egy szilárd gömb – mint sokan vélték.”

### Kepler (1571 – 1630)




- Tycho Brahe asszisztense
- A bolygómozgás törvényei Brahe nagyon pontos mérései alapján
- A marspálya alakjának meghatározása (8' eltérés)

### Johannes Kepler

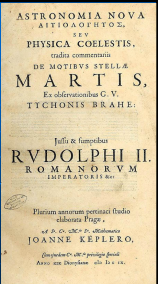


„A szemünkkel látott dolgok lát ezésétől eljussunk létezésük és mozgásuk okához.”


- Grazban tanít matematikát
- 1596: *Mysterium Cosmographicum*
- 1600: Tycho Brahe meghívja Prágába
- 1601: meghal Brahe, Kepler lesz a királyi csillagász (II. Rudolf → Bécs)
- Per az örökségért
- A Kepler-törvények felismerése
- 1612: a Lutheránusokat elűződik Prágából
- Felesége, 2 fia meghal a harmincéves háborúban
- Linzben újra megnősül, 2 nyomorék lánya születik (hamarosan meghalnak)

### Kepler a természettudományról

„Lactantius szent ugyan, aki tagadta a Föld gömb alakját. Agoston is szent, aki a gömb alakot elfogadta ugyan, de tagadta, hogy az ellentétes oldalon is élnek emberek. A mai officium is szent, amely elfogadja a Föld kicsinyességét, de mozgását tagadja. De még szentebb számomra az igazság, amikor az egyházatnitók lánti tiszteletem ellenére bebizonyítom, hogy a Föld gömbölyű, az ellentétes oldalán is laknak, jelentéktelenül kicsiny, és mozog is az égitestek között.” (Astronomia Nova)



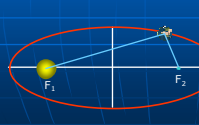
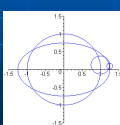
### Kepler törvényei



- 1609: *Astronomia Nova* (1. és 2. törvény)
- 1619: *Harmonices mundi* (3. törvény)
- Működő heliocentrikus világgép!
- Egyenértékű a ptolemaioszi rendszerrel!
- Döntés: dinamika

### Kepler 1. törvénye

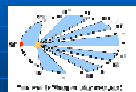
A bolygók olyan ellipszispályán keringenek a Nap körül, melynek egyik fókuszpontjában a Nap áll.

### Kepler 2. törvénye

A Napot a bolygóval összekötő vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket sűrol.

- napközben nagyobb  $v$
- naptávolban kisebb  $v$



$v_m \sim 1/r \Rightarrow v_m \cdot r = \text{állandó}$

A sebesség a naptávolságtól függ!!! (A Nap módosítja???)

### Kepler 3. törvénye

A naptávolságok köbe arányos a keringési idők négyzetével.

$$a^3 \sim T^2 \Rightarrow (a_2/a_1)^3 = (T_2/T_1)^2$$

A Naprendszer felmérése, az ismert bolygók naptávolsága!  
Például Jupiter:  $T = 11,86$  év  
 $(a_j/1 \text{ CsE})^3 = (11,86 \text{ év}/1 \text{ év})^2$   
 $a_j = 5,2 \text{ CsE}$

### Galilei (1564 – 1642)

- Arisztotelész:  $v \sim F \Rightarrow$  a testek állandó sebességgel esnek lefelé
- Arisztotelész óta senki sem mérte meg!
- Galilei bevezeti a mozgások kísérleti vizsgálatát!
- A test gyorsulva esik (gravitáció!):  
 $v \sim t \Rightarrow v = a \cdot t \Rightarrow$   
 $s = v_{\text{atlag}} \cdot t = (0 + a \cdot t)/2 \cdot t = a \cdot t^2/2$

### Newton (1642 – 1727)

1687: *Principia mathematica philosophiae naturalis* (A természetfilozófia matematikai elvei):  
**A mechanika törvényei**

1. A mozgás (sebesség) megváltoztatásához kell erő!
2.  $E_o = m \cdot a$
3. A kölcsönhatás törvénye:  $E_{12} = -E_{21}$

### A heliocentrikus világegyetem dinamikai bizonyítéka

- Az egyenes körmozgás dinamikai feltétele: az eredő erő a kör középpontja felé mutat (ellipszis esetén az egyik fókusz felé).
- Ott van a Nap!!!
- $F_{cp} = m r \omega^2 = m v^2 / r$

### A gravitációs törvény

Körmozgás:

$$F_{cp} = m r \omega^2 = m r \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = m r \frac{4\pi^2}{T^2}$$

így:  $\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 r_1 \frac{4\pi^2}{T_1^2}}{m_2 r_2 \frac{4\pi^2}{T_2^2}} = \frac{m_1 r_1 T_2^2}{m_2 r_2 T_1^2}$

### A gravitációs törvény

Kepler 3. törvénye alapján:

$$\left( \frac{T_2}{T_1} \right)^2 = \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^3$$

így:  $\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 r_1 T_2^2}{m_2 r_2 T_1^2} = \frac{m_1 r_1 r_2^3}{m_2 r_2 r_1^3} = \frac{m_1 r_2^2}{m_2 r_1^2}$

azaz:  $F \sim \frac{m}{r^2}$

### A gravitációs törvény

Gravitáció:  $F \sim M/r^2$   
 Az  $F = m \cdot a$  miatt:  $F \sim m$

Így:  $F \sim \frac{mM}{r^2}$ ,  $F = f \frac{mM}{r^2}$

### A gravitációs állandó

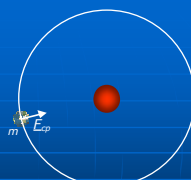
- Cavendish (1731 – 1810)
- A gravitációs törvény kísérleti igazolása torziós ingával
- $f = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$  (1798)

### A Föld tömege

$$m \cdot g = f \frac{m \cdot M}{r^2}$$

$$M = \frac{g \cdot r^2}{f} = \frac{9,81 \cdot (6371 \cdot 10^3)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \text{ kg} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

### A Nap tömege



$$m \cdot r \cdot \omega^2 = f \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

$$m \cdot r \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = f \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

$$M = \frac{r^3}{f} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{(150 \cdot 10^6 \cdot 10^3)^3}{6,67 \cdot 10^{-11}} \cdot \left(\frac{2\pi}{365 \cdot 24 \cdot 3600}\right)^2 \text{ kg} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

### A Neptunusz felfedezése

- XIX. szd.: az Uránusz egy darabig sietett, aztán késett a pályáján.
- Számítások: Adams és Leverrier (1845-46)
- Felfedezés: Galle, 1846. szept. 23.



Urbain Leverrier (1811-1877)      Gottfried Galle (1812-1910)

### I. kozmikus sebesség (körsebesség)



$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r} = f \cdot \frac{mM}{r^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{fM}{r}} = 7,9 \text{ km/s}$$

$$\sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6378 \cdot 10^3}}$$

### Súlytalanság


- A sebesség nem függ a tömegtől!
- Az űrhajós és az űrhajó ugyanakkora sebességgel mozog
- ⇒ Nem változik az egymáshoz viszonyított helyzet!
- Súlytalanság



### A keringési idő

$$T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi \cdot r}{v}$$

$$= \frac{6,28 \cdot 6378 \cdot 10^3}{7900}$$

$$= 5070 \text{ s} = 84 \text{ perc}$$


### Geoszinkron műholdak

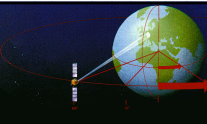
Keringési idő: 24 óra

$$m \cdot r \cdot \omega^2 = f \cdot \frac{mM}{r^2}$$


Magasság: 42000 - 64000 km = 36000 km

$$m \cdot r \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = f \cdot \frac{mM}{r^2}$$

$$r^3 = f \cdot M \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot \left(\frac{24 \cdot 3600}{6,28}\right)^2$$

$$r = \sqrt[3]{7,575 \cdot 10^{22}} = 4,2 \cdot 10^7 \text{ m} = 42000 \text{ km}$$


### II. kozmikus sebesség (szökési sebesség)




$$E_{\text{össz}} < 0: \text{ kötött állapot}$$

$$E_{\text{össz}} \geq 0: \text{ szabad állapot}$$

$$E_{\text{össz}} = E_m + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - f \frac{mM}{r} \geq 0$$

$$E_{\text{össz}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = f \frac{mM}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{2fM}{r}} = \sqrt{2} \cdot v_{\text{kör}} = 11,2 \text{ km/s}$$


### Utazás a Titánra



Űrhajóval meglátogatjuk a Szaturnusz Titan nevű holdját.

Legalább hány km-t kell megtennünk, ha a bolygó Nap körüli keringési ideje 29,46 év?

A Föld - Nap távolság: 149,6 millió km

### Az űrhajó útja

Kepler III. törvénye alapján:

$$\left(\frac{r_{Sz}}{1 \text{ CsE}}\right)^3 = \left(\frac{T_{Sz}}{1 \text{ év}}\right)^2 = 29,46^2$$

$$r_{Sz} = \sqrt[3]{29,46^2} \text{ CsE} = 9,54 \text{ CsE} = 9,54 \cdot 149,6 \text{ millió km} = 1,43 \cdot 10^9 \text{ km}$$

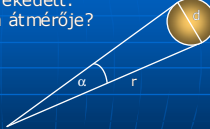
$$s \geq 1,43 \cdot 10^9 - 149,6 \cdot 10^6 \text{ km} = 1,28 \cdot 10^9 \text{ km}$$

(Cassini: 3,5 · 10<sup>9</sup> km)



Radáros távolságmérőnk 49200 km-t jelzett, amikor az égitest látószöge 6°-ra növekedett. Mekkora a Titán átmérője?

② A Titán átmérője

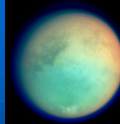


$$\frac{d}{2\pi \cdot r} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

$$d = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r = 5150 \text{ km}$$

③ A Titán tömege


240 km magasan pályára álltunk az égitest körül. A keringési idő 165 perc volt. Mekkora a Titán tömege?



$$r = 5150/2 + 240 \text{ km} = 2,815 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$T = 165 \cdot 60 \text{ s} = 9900 \text{ s}$$

A Titán tömege




$$F_{cp} = F_{grav} \Rightarrow m r \omega^2 = f \frac{mM}{r^2}$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{fM}{r^3} \Rightarrow M = \frac{r^3}{f} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$M = \frac{(2,815 \cdot 10^6)^3}{6,67 \cdot 10^{-11}} \cdot \left(\frac{2\pi}{9900}\right)^2 = 1,35 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

④ Az űrhajós súlya

Le akarunk szállni a Titánra. Mekkora lesz az űrhajóstól 100 kg tömegű űrhajós súlya a felszínen?



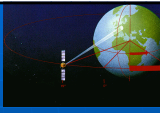
$$G = mg = f \frac{mM}{r^2}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{100 \cdot 1,35 \cdot 10^{23}}{\left(\frac{5150}{2} \cdot 10^3\right)^2} \text{ kg} = 136 \text{ N}$$

$$(13,6 \text{ kg})$$

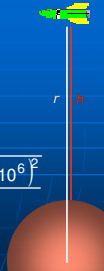
⑤ A szinkronpálya sugara

Milyen magasan keringjen az űrhajó, hogy mindig a leszállóhely fölött maradjon? A Titán tengelyforgási ideje 16 nap (kötött!).



$$T = 16 \text{ nap} = 16 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 1,38 \cdot 10^6 \text{ s}$$

Az űrhajó magassága



$$F_{cp} = m r \omega^2 = m r \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = f \frac{mM}{r^2}$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{fM}{r^3} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{fMT^2}{4\pi^2}}$$


$$r = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,35 \cdot 10^{23} \cdot (1,38 \cdot 10^6)^2}{4\pi^2}}$$

$$r = 7,58 \cdot 10^7 \text{ m} = 75800 \text{ km}$$

$$h = 75800 - 2575 \text{ km} = 73225 \text{ km}$$

⑥ Vissza az űrhajóhoz

Mekkora sebességgel emelkedjen fel a leszálló egység?



$$v = \sqrt{\frac{f \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,35 \cdot 10^{23}}{2,575 \cdot 10^6}} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = 1870 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,87 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 6732 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

⑦ Vissza a Földre

Mekkora sebességgel kell indítani az űrhajót, hogy visszajusson a Földre?



$$v_{szökési} = \sqrt{2} \cdot v_{kör}$$

$$v = \sqrt{2} \cdot 1870 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2645 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$