

7-Egyensúly

.1) Légcsavaros szán $v_1 = 6$ m/s sebességgel halad kis hajlásszögű lejtőn felfelé. Ugyanezen a lejtőn lefelé $v_2 = 8$ m/s a sebessége, változatlan teljesítmény mellett. A légellenállástól eltekintünk.

- a) Mekkora lesz a sebessége az ugyanolyan súrlódási együtthatójú vízszintes úton, ha motorjának teljesítménye továbbra is változatlan? **(6,86 m/s)**
- b) És ha a lejtő szöge 30° ? **(5,94 m/s)**
- c) Legfeljebb milyen magas lejtőn mehet fel ekkora teljesítménnyel? **(bármekkora, ha a légcavar legalább mg erőt tud kifejteni)**

Az erők egyensúlyt tartanak, a húzóerő kifejezhető. Az állandó teljesítmény a húzóerő és a sebesség szorzata.

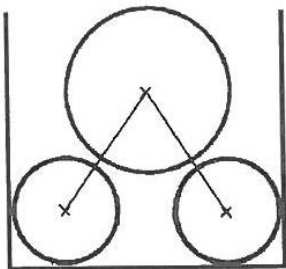
A fel- és lefelé menő esetek egy egyenletrendszer adnak a P teljesítményre és a súrlódási együtthatóra. $P = mgsin\alpha \cdot \frac{2v_1v_2}{v_2-v_1}$ és $\mu = tg\alpha \cdot \frac{v_1v_2}{v_2-v_1}$ adódik.

Ezután a harmadik esetre hasonlóan felírva a húzóerő teljesítményét, és az előbbi eredményt felhasználva: $v_3 = \frac{2v_1v_2}{v_2-v_1} \cdot \cos\alpha$.

Az állandó teljesítmény miatt elegendően kicsi sebesség mellett a húzóerő akármilyen nagy lehet elvileg. Kérdés, hogy a szán légcavarja tud-e mg nagyságú húzóerőit is kifejteni?

.2) Hajlékony, igen hosszú kötélt minden métere 20 N súlyú. A kötélt 10 m magasan levő álló csigán van átvetve és szabad végén 15 kg tömegű test lóg. A kötélt többi része a talajon fekszik. A súrlódástól eltekintünk. Milyen egyensúlyi helyzet hozható létre? **(A test 7,5 m magasan van egyensúlyi helyzetben, amely labilis)**

Az egyik oldalon 10 m kötélt súlya 200 N. Ezzel tart egyensúlyt a jobb oldalon a 150 N súlyú test és a jobb oldali kötélrész.



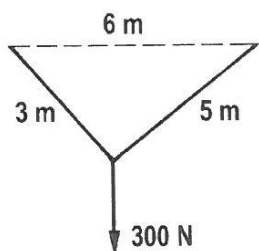
.3) 50 cm széles téglalap keresztmetszetű vályúban 10 cm sugarú 200 N súlyú fémhengerek fekszenek. Ezekre 15 cm sugarú, 600 N súlyú harmadik henger van.

- a) Mekkora erők hatnak a vályú falaira? **(Az oldallapokra 225 N; az alaplagra 1000 N)**
- b) Ugyanolyan anyagból készített 15 és 10 cm sugarú hengerek esetén mekkora legyen a vályú szélessége, hogy a kicsi hengerek az alaplapot akkora erővel nyomják mint az oldalfalakat? **(64,2 cm)**

a) Előbb a geometriából a szöget kell meghatározni, melyet a függőlegessel bezár ($36,87^\circ$), majd a nagy henger egyensúlyából a hengerek egymásra kifejtett nyomóerejét. Ezután az alsó henger egyensúlya következik.

b) A tömegek aránya a sugarak arányának négyzete.

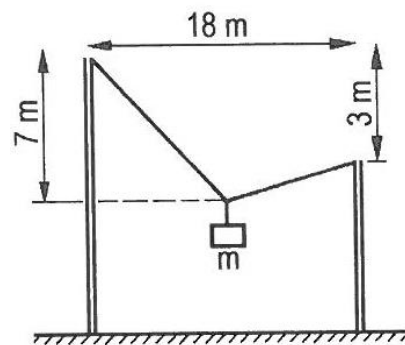
A kicsi hengernél mindkét lapon ható F erőre, az egymás közötti N nyomóerőre és az α szögre egyenletrendszer adódik, ha a két henger egyensúlyát komponensenként felírjuk. A szögből számítható a vályú szélessége.



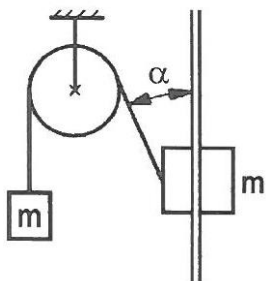
.4) 3 m és 5 m hosszú fonálon 300 N súlyú test függ. A fonalak végpontjai 6 m távolságban, azonos magasságban vannak rögzítve. Mekkora erők hatnak a fonalakban? **(167,0 N; 260,6 N)**

Az erők komponensekre bontással határozhatók meg azután, miután a kötelek függőlegessel bezárt szögét a geometriából meghatároztuk. Ez utóbbi a nehezebb feladat. Pl.: a 3,4,5 m oldalú háromszög területe a Heron-képletből jön ki, amiből aztán a 6 m oldalhoz tartozó magasság adódik. Innen néhány szögfüggvény adja a keresett szögeket.

.5) Egymástól 18 m távolságban levő különböző magasságú lámpaoszlopok között kifeszített huzalon 150 N súlyú lámpa függ, az oszlopoktól egyenlő távolságra. Mekkora erő feszíti a huzal két ágát, ha a lámpa a bal oldali horog alatt 7 m-re van, és a jobb oldali horog 3 m-rel lejjebb van a bal oldalnál?
(155,5 N; 134,3 N)



Az előzőhöz hasonlóan először a kötélszögek kellenek a lógó testnél. Ezután komponensekre bontjuk az erőket a felfüggesztési pontnál.



.6) Az ábra szerinti elrendezésben a rögzített függőleges oszlopon az m tömegű test $\mu = 0,3$ mellett csúszhat a rúdon. A testet tartva, vízszintes kötélfelületből indulva, nagyon lassan egyre lejjebb eresztjük, amíg magára hagyva meg nem áll.

a) Milyen α szögnél van ez az egyensúlyi helyzet? Mekkora most a súrlódási erő?

$$(\sin \alpha = \frac{2\mu}{1+\mu^2}; \alpha = 33,39^\circ; 0,165 \cdot mg)$$

b) Mi történik a testtel, ha lefelé, $\alpha = 20^\circ$ -os szögig húzzuk le, majd magára hagyjuk? Mekkora elengedéskor a súrlódási erő? (ott marad, ; $0,060 \cdot mg$)

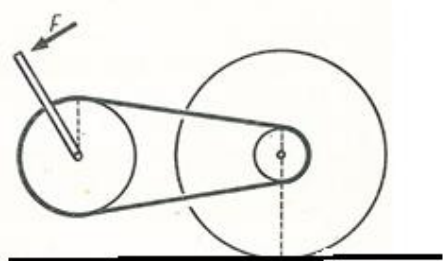
c) Milyen ennek az egyensúlyi helyzetnek a stabilitása: Mi történik, ha most a testet kicsit felfelé, avagy lefelé kitérítve, magára hagyjuk? (felfelé: stabil; lefelé közömbös)

A testre a kötélfő mindig mg erőt fejt ki, de ennek szöge változik. Ennek vízszintes komponensét a rúd oldalirányú kényszer-nyomóereje kénytelen lerontani, ezzel egyben meghatározottá válik az $S^{\max}$ maximális súrlódási erő is függőlegesen.

Az egyensúly függőleges irányban megköveteli, hogy az S súrlódási erő éppen az a mg és a kötélerő függőleges komponensének különbsége legyen. Ha ez az S igény nem több az $S^{\max}$ felső korlát, akkor a test egyensúlya megvalósul.

A számolás matematikai nehézsége a $\mu \cdot \sin \alpha + \cos \alpha = 1$ trigonometrikus egyenlet megoldása ($33,4^\circ$).

A stabilitás attól függ, hogy kis kitérítés, majd magára hagyás után merre indul.



.7) Kerékpár pedálkarjának hossza 20 cm, a hátsó kerék sugara 35 cm. A pedál által hajtott fogaskerék és a hátsó kerék fogaskerekein az egyforma nagyságú fogak száma 48 és 17.

Ha a pedált F erővel nyomjuk, mekkora erő „viszi előre” a kerékpárt, illetve mekkora a kerék és a pedál fordulatszámának aránya? ($0,202F$; $2,82$)

Takarítható-e meg munka ahhoz képest, mintha a kerékpárt akkora erővel tolnánk, mint az imént a kerék alatt ébredő erő? (nem)

Az egyforma fogak miatt a fogaskerek kerületeinek, így a sugarainak aránya 48/17.

Az első fogaskerék a pedálra hat és a lánc által kifejtett erők hatására van egyensúlyban, míg a hátsó kerék a lánc által kifejtett és a talaj által kifejtett erők hatására.

A lánc az erőt viszi át egyik fogaskerékről a másikra.

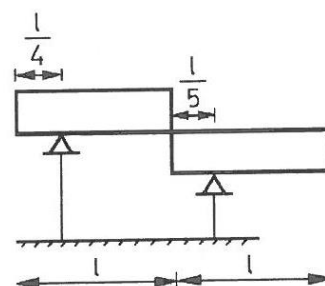
Munkát nem takaríthatunk meg. A kerékpár egy bonyolult „egyszerű gép”.

.8) Két teljesen azonos geometriai méretű, de különböző anyagból készült homogén gerenda közül az egyiket, az ábra szerint hosszúságának egynegyed részénél, a másikat hosszának egyötöd részénél alátámasztjuk úgy, hogy az első gerenda hosszabbik vége a második gerenda rövidebbik végén fekszik fel. Ekkor egyensúlyban van.

a) Mekkora erővel hat egymásra a két gerenda, ha az első gerenda súlya 900 N?

(300 N)

b) Mekkora a két gerenda anyagsűrűségének aránya? (4,5)



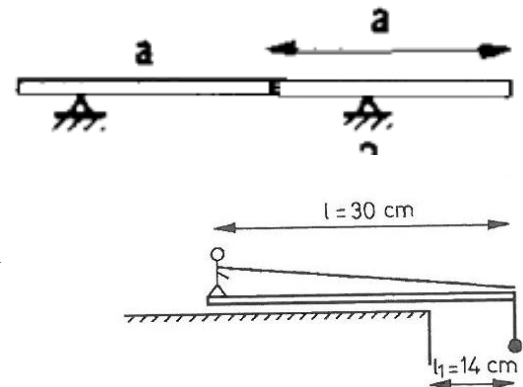
Az erők berajzolása után használjuk ki a forgatónyomatékok egyenlőségét (célszerű a tengelyt az alátámasztásokhoz tenni).

Bár a gerendák belső pontban vannak alátámasztva, a nehézségi erőket ne vegyük két részre, a támadáspontot középre rajzoljuk be. (Így egyszerűbbek lesznek az egyenletek.)

.9) Két egyenlő hosszúságú, egyenlő súlyú homogén rudat súrlódásmentes csukló köt össze. A bal oldali rudat az ábra szerint negyedénél támasztjuk alá. Hol kell alátámasztani a másik rudat, hogy egyensúlyban legyenek? **(a bal oldali harmadolópontban)**

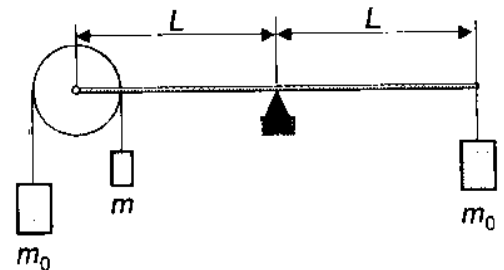
Az előzőhöz hasonlóan.

.10) Az ábrán látható pici bábu elindul az asztalra helyezett 55 g tömegű deszkán. Egy-egy lépése 0,5 cm és 0,75 s-ig tart. A bábu tömege 10 g, a nehezék tömege 1 g, a fonál hossza 30 cm, tömege elhanyagolható. Mennyi ideig haladhat a bábu a deszkán? **(30,15 s)**



A gerendára ható erőket kell vizsgálni. Abban a pillanatban, amikor a gerenda megbillen, az asztal az erőt az asztal élénél fejti ki. Ekkor a gerendára 6 db erő hat, közülük 2 db vízszintes. A forgatónyomatékok egyensúlyánál célszerű a tengelyt az asztal éléhez tenni. (A fonalerő 10 mN)

.11) Egyenlőkarú emelő egyik végére elhanyagolható tömegű korong van szerelve. A korongról lelógó fonál végeire m_0 és m tömegű testeket akasztottunk, az emelő másik oldalán m_0 tömegű test függ. Mekkora legyen a fonál másik végén függő test m tömege, hogy a rendszert magára hagyva, az emelő vízszintes helyzetben maradjon? **($m_0/3$)**



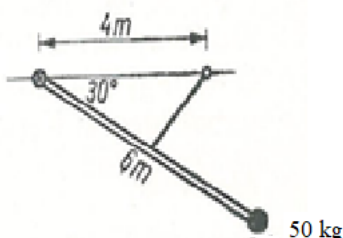
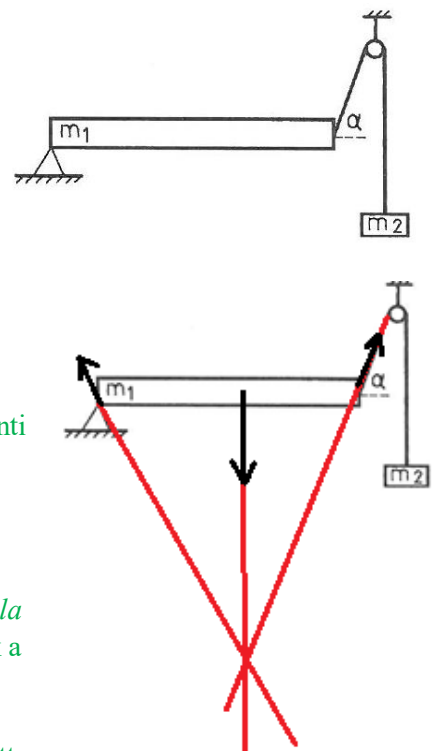
Nem forgó korong esetén a rendszer balra billenne le. Forgó korong esetén lecsökken a korong tengelye által a rúdra kifejtett nyomóerő. Ha mégis egyensúly lesz, akkor ez az erő (ami a két kötélrő összege) éppen m_0g .

.12) Homogén rúd egyik végét csuklósan alátámasztjuk, a másik végéhez erősített kötelet súrlódásmentes tengelyű csigán átvetjük úgy, hogy a kötel a vízszintessel 60° -os szöget zár be. A rúd hossza 2 m, tömege 40 kg. A kötel másik végén m_2 tömegű test függ.

- Mekkora az m_2 egyensúly esetén? **(23,1 kg)**
- Mekkora az állócsiga felfüggesztésére ható erő? **(277,6 N)**
- Mekkora az alátámasztásra ható erő? **(231 N)**
- Szerkesztéssel is határozzuk meg az alátámasztó erő irányát.

A kötélrő m_2g . Legyen a tengely a csuklónál, $\Sigma M=0$. Adódik az m_2 tömeg. $\Sigma F=0$, adódik alátámasztó erő. (Lehet komponensekre is bontani az erőket a fenti egyensúlyi feltételek alkalmazásakor.)

A szerkesztésnél nagy segítségünkre van az alábbi szabály ($\Sigma M=0$ -ból adódik, vajon hogyan?): *Ha egy merev testre csak 3 erő hat, és azok közül kettőnek a hatásvonala metszi egymást, akkor e metszésponton a harmadik erő hatásvonala is átmegy.* Emiatt a kötélrő irányának és a rúd közepén átmennő függőlegesnek a metszéspontján átmegy az alátámasztó erő hatásvonala is. Így az erők ábrája szimmetrikus lesz. Így látkató, hogy az alátámasztó erő szöge is 60° , emiatt az oldalsó erőknek a rúd középpontjára vonatkoztatott karjai is egyenlők, de emiatt a nagyságaik is.



.13) Az ábra szerinti elrendezésben egy 6 m hosszú súlytalan rúd egyik végét csuklóban rögzítjük. A rúd másik végén 50 kg-os teher van. A rúd közepét fonál tartja 30° -os helyzetben.

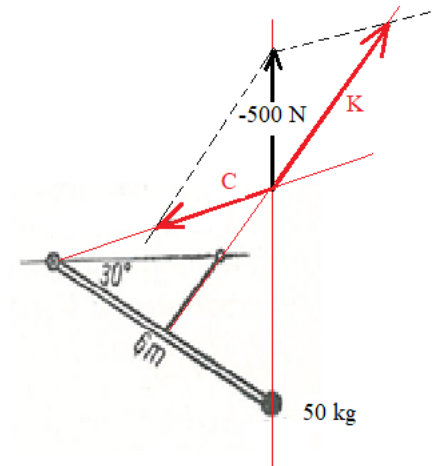
a.) Mekkora erő feszíti a fonalat és nyomja a csuklót? **(889 N; 640N)**

b.) Szerkesztéssel is határozzuk meg a fonál és a csuklóerő vektorainak nagyságát és irányát!

Számolással: Az ábrán látható háromszögben a kötélhosszat, majd a kötélt és a vízszintes szakasz szögét kell meghatározni (szinusz- és koszinusztételek, avagy furfangosan ki kell használni a $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ -os szögű háromszögeket). 2,053 m és $46,93^\circ$ adódik.

Számítsuk ki a kötélerő karját, ha a tengely a csuklónál van. Ezután a forgatónyomatékokból adódik a kötélerő.

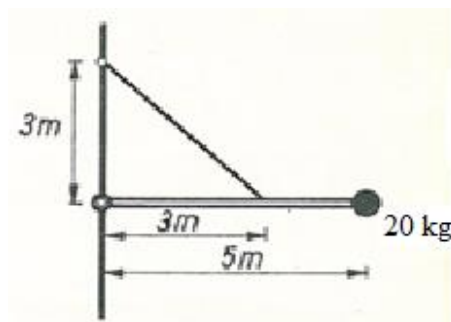
A csuklóerőt $\Sigma F=0$ -ból számolhatjuk nagyság és irány szerint (cos-tétel, avagy komponensekre bontás esetén csak sima szögfüggvények kellenek).



Szerkesztéssel: A kötélerő egyenesével elmetszük az 500 N-os erő hatásvonalát.

A metszésponton fog átmenni a csuklóerő hatásvonala is.

Mivel a kötélt és csuklóerő összege éppen a 500 N-os erővel tart egyensúlyt, ezért a hatásvonalak metszéspontjába toljuk a -500 N-os erőt, és azt a kötélt és csuklóerő-irányú komponensekre bontjuk. E komponensek a kötélt és csuklóerők lesznek. Vektoraik hosszát az az 500 N-os erő hosszához mérve, egyenes arányossággal számolhatjuk. (A szerkesztés pontatlansága miatt csak közelítő jelleggel.)



.14) Az ábra elrendezése szerint egy súlytalan csuklós rúd 20 kg terhet tart. Mekkora erő hat a fonálban és a csuklóra? Számoljunk és szerkesszünk!

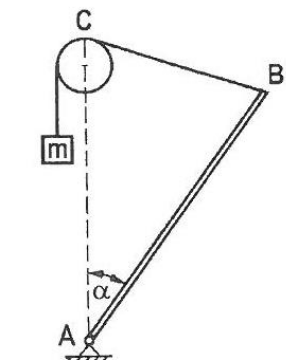
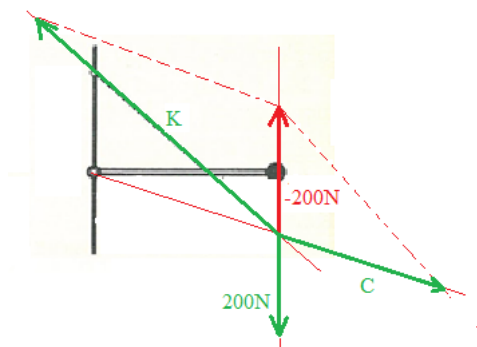
(471 N; 359 N)

Számolással: A 3×3 m-es befogójú háromszög egyenlőszárú és derékszögű, átfogójához tartozó magassága éppen a K kötélerő karja, ha a tengelyt a csuklóhoz tesszük és $\Sigma M=0$ -t alkalmazunk.

A szögek ismeretében C csuklóerő

összeadással számolható K és mg erővektorokból $\Sigma F=0$ miatt.

Szerkesztéssel: Vegyük fel a nehézségi erővektort az ábrán. Ennek mm-ekben mért hossza fog megfelelni a szerkesztés során 200 N-nak. Hatásvonalának és a kötélt egyenesének metszéspontján átmegy a C erő egyenese is. E pontban a -200N-os erőt C és K irányú komponensekre bontjuk, vektoraik mm-ben mért hosszát N-okra visszaváltjuk.



.15) Az ábrán látható elrendezésben $\overline{AB}$ rúd tömege 10 kg, és az alsó végéhez erősített vízszintes tengely körül foroghat. A rúd felső végéhez erősített csigán átvett fonálon m tömegű test függ. A csiga tengelye és a rúd tengelye ugyanazon függőleges egyenesre esik úgy, hogy $\overline{AC} = \overline{AB}$. (Útmutatás: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$)

a.) Mekkora α szög esetén van a rendszer egyensúlyban $m=5$ kg, és $m=2,5$ kg esetén?

(60,00°; 28,96°)

b.) Mekkora és milyen irányú erővel hat a rúd a tengelyre $m=5$ kg, és $m=2,5$ kg esetén?

(86,6 N, 30° a függőlegeshez, illetve 96,82 N, 75,53° a függőlegeshez)

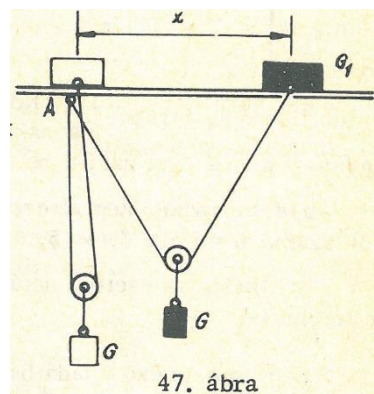
Számolás: A kötélerő éppen mg. A geometria miatt a kötélerő karja a háromszög szimmetriamagassága: $l \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$, a nehézségi erőé $l/2 \cdot \sin \alpha$, ha a tengelyt a csuklóhoz tesszük. $\Sigma M=0$ -ból kijön a kötélerő: $K(=mg) = 100N \cdot \sin \alpha / 2$.

A csuklóerő $\Sigma F=0$ -ól adódik.

Szerkesztős: Az egyenlőszárú háromszögben a rúdra ható nehézségi erő egyenese a kötélerő egyenesét az alap felezőpontjában metszi, ahol átmegy a csuklóerő egyenese is, tehát ennek iránya mindig $\alpha/2$ a függőlegeshez képest. Bontsuk fel a -100 N erőt C és K irányú összetevőkre.

Hibrid: Az mg -vel egyenlő kötelerő egy forgatónyomatékos egyenletből számolható. Majd észrevehető, hogy a kötelerő és a csuklóerő merőlegesek egymásra, és mivel $\Sigma F=0$ miatt a nehézségi erővel együtt zárt vektorháromszöget alkotnak, amiben ismert 2 oldalvektor, ezért ebből a harmadik erő és a szögek is számolhatók.

.16) Fonál egyik végét vízszintes gerenda A pontjához, másik végét a gerendán elcsúsztatható G_1 súlyú testhez kötjük. A fonál két szára közé elhanyagolható tömegű mozgócsigát helyezünk, melyet G súllyal terhelünk. Mennyire lehet a G_1 súlyú testet a gerendán az A ponttól eltávolítani, hogy a rendszer még egyensúlyban maradjon. A gerenda és a rajta elcsúsztatható test között a súrlódási együttható μ , a fonál hossza ℓ . (A csigánál a súrlódás elhanyagolható.) Legyen $G = 2 G_1$ és $\mu = \frac{4}{15}$. ($x \leq 8/17\ell$)

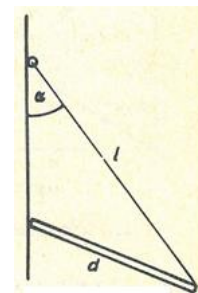


A két kötélhossz egyenlő. (A K kötelerők egyenlők, hiszen a csiga nem forog, emiatt a G és a két kötelerő zárt vektorháromszöge egyenlőszárú, a kötelek függőlegessel bezárt szögei egyenlők.)

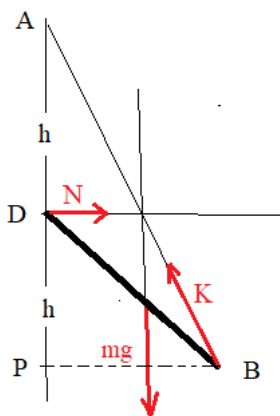
A meg nem csúszás ekvivalens feltétele a felső testnél: $K(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \leq \mu G_1$. (Kicsi α -ra a zárójel negatív, automatikusan teljesül, míg nagyobb α esetén, pozitív zárójel mellett, egyenlőséggel adja meg a megcsúszás határszögét.)

Az egyensúly az alsó testnél: $G = 2K\cos\alpha$.
Ezekből $\tan\alpha \leq 8/15$ adódik. A határhelyzeti $\alpha = 28,07^\circ$ -ből x számolható.

.17) Az ábra szerinti elrendezésben egy d hosszúságú rúd egyik végét l hosszúságú fonál tartja, másik végét teljesen sima falnak támasztjuk, majd a rendszert magára hagyjuk és egyensúlyban marad. $d/l = \sqrt{5/8}$



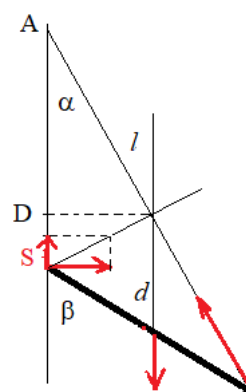
- a) Milyen helyzetben áll az egyensúlyi helyzetű rúd? ($\alpha = 45^\circ$)
- b) Határozzuk meg a fal és a kötél által kifejtett erő nagyságát! (mg ; $\sqrt{2}mg$)
- c) *Hogyan van egyensúlyban a rúd, ha a fal nem teljesen sima?



a) A sima falon nincs súrlódási erő, a fal csak vízszintesen nyomja a rúd bal végét. A nehézségi erő hatásvonal a háromszög középvonal egyenesese, ezért a kötél egyenesét a kötél felezőpontjában metszi, viszont ekkor itt megy át a fal nyomóerejének egyenesese is. Emiatt azonban a rúd bal vége (D) felezi az AP szakaszt, ui. N egyenesese középvonal ABP háromszögben is. Az APB és DPB háromszögekben a PB oldalra felírt Pitagorasz-tételekből adódik, hogy $h = l/\sqrt{8}$ és $PB = l/\sqrt{2}$.

b) A D ponton átmenő tengelyre felírt forgatónyomatékok egyensúlya miatt a kötelerő függőleges K_1 és vízszintes K_2 komponensére:
 $K_1 - mg/2 = K_2/2$ adódik. Ehhez hozzávéve az erők egyensúlya miatt $N = K_2$ és $K_1 = mg$ egyenletet, adódik a megoldás $K_1 = K_2 = N = mg$.
Ezért $K = \sqrt{2}mg$.

c) Nem sima fal esetén a falon is van súrlódási erő, de a fal által kifejtett ezen két erő eredőjének hatásvonal most is átmegy a kötél középpontján. Ha a súrlódási erő felfelé mutat, akkor a rúd vége lejjebb, ha pedig lefelé mutat, akkor a rúd vége feljebb van mint a kötél középpontja. Mivel a súrlódási erőt a fal nyomóereje felülről korlátozza, ezért a bal vég eltávolodása felfelé és lefelé nem lehet akármilyen nagy.



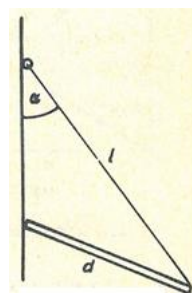
.18) *Rúd egyik végét fonállal falhoz erősítjük, másik végét az érdes falhoz támasztjuk. Egyensúly esetén a fonál a fallal α szöget zár be. Legyen $\frac{d}{\ell} = \frac{3}{4}$ (ℓ a fonál, d a rúd hossza)!

a) Mekkora erő feszíti a fonalat és legalább mekkora μ_0 nyugalmi súrlódási együttható esetén jöhet létre egyensúly, ha $\alpha = 45^\circ$, illetve $\alpha = 30^\circ$?

($\mu_0 \geq 0,293$, $K = 1,09 mg$ illetve $\mu_0 \geq 0,504$, $K = 1,63 mg$)

b) Legyen most $\mu_0 = 0,5$! Milyen a szögek mellett marad a rúd egyensúlyban? (Figyelem!

Szükségesek trigonometrikus összefüggések a magasabb évfolyamokról: $\sin 2\alpha = \dots$, $\cos 2\alpha = \dots$,



továbbá ismerni kell az $a \cdot \sin\varphi + b \cdot \cos\varphi = c$ típusú trigonometrikus egyenlet megoldását!)
($30,1^\circ$ és $47,2^\circ$ között)

A geometria miatt a jobb vég faltól való távolsága $l \cdot \sin\alpha = d \cdot \sin\alpha$, így α és β kapcsolata a feltétel miatt:
 $\sin\beta = \frac{4}{3} \sin\alpha$.

Az ábrán látható, rúdra ható erők miatt 3 egyenlet adódik a rúd egyensúlya miatt az N, K, S ismeretlenekre. ($\Sigma F=0$ komponensenként és $\Sigma M=0$, amikor a tengely a bal végen van):

$$N = K \sin\alpha$$

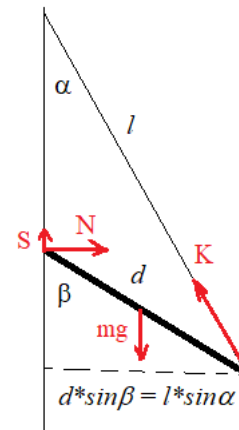
$$K \cos\alpha + S = mg$$

$$K \cdot d \cdot \sin(\beta - \alpha) = mg \cdot \frac{l \cdot \sin\alpha}{2}$$

A kötél erő karja $d \cdot \sin(\beta - \alpha)$, mert a rúd és a köté szöge $\beta - \alpha$.

Adott α esetén számolható β , majd $\beta - \alpha$ is. Ezután az egyenletrendszer megoldható. A

megoldása: $K = \frac{2 \sin\alpha}{3 \sin(\beta - \alpha)} mg$, $N = \frac{2 \sin^2\alpha}{3 \sin(\beta - \alpha)} mg$ és $S = mg \left(1 - \frac{2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{3 \sin(\beta - \alpha)}\right)$. Az egyensúly feltétele ezután, hogy $|S| \leq \mu_0 N$ legyen.



Az első esetben pozitív, a második esetben negatív S adódik, azaz először a felfelé mutató S miatt a bal vég alacsonyabban van a falon mint a köté középpontja, a második esetben pedig S negatív, a bal vég magasabban van a köté felezőpontjánál. (ld. az előző feladatot!)

A .b) feladatban a megcsúszás határhelyzetében $|S| = \mu_0 N$. Ez két külön eset! Egyenlet adódik α és β -ra, amit a $\sin\beta = \frac{4}{3} \sin\alpha$ összefüggéssel egyváltozósá tehetünk, így a magasabb évfolyamosoknak megoldható lesz a javasolt trigonometriai háttértudással.

.19) Egy 3 m hosszú 150 N súlyú létrát *teljesen sima* falnak támasztunk úgy, hogy alsó vége 1,8 m-re van a faltól a vízszintes talajon.

a.) Határozzuk meg a fal és a talaj által a létrára kifejtett erők nagyságát és irányát! (**56,25 N; 160,2N**)

b.) Legalább mekkorának kell lennie a tapadási súrlódási együttható értékének a talaj és a létra között, hogy egy 800 N súlyú ember a létra legmagasabb pontjára felállhasson anélkül, hogy a létra megcsúszna? (**$\mu \geq 0,6908$**)

c.) Hogyan változik ekkor a talaj által kifejtett erő iránya? (**$20,56^\circ$ -ról $34,64^\circ$ -ra nő a hajlásszög a függőlegeshez képest**)

a.) A fal sima, így a nyomóereje (F) merőleges a falra. A magasság Pitagorasz-tételből: 2,4 m.

4 erő hat a rúdra, amiből 3 ismeretlen (N, S súrlódási, T talaj tartóereje merőőlegesen). Felírható 3 egyenlet:

$$\begin{cases} mg = T \\ S = F \\ mg * 0,9m = F * 2,4 m \end{cases} \quad (\text{tengely a talajon}).$$

b.) Az új egyenletrendszer: $\begin{cases} mg + 800N = T \\ mg + 800N = T \\ mg * 0,9m + 800N * 1,8m = F * 2,4 m \end{cases}$, illetve a meg nem csúszás feltétele: $S \leq \mu T$.

c.) T és S eredőjének hatásvonala kezdetben átmegy F és mg hatásvonalának metszéspontján. Ahogy az ember felfelé mászik, a 800 N-os és 150 N-os erőket a hatás szempontjából helyettesítő eredő erő hatásvonala a fal felé mozdul el, így az F falerő hatásvonalát a falhoz egyre közelebb metszi. Ezért hajlik az itt átmenő talajerő iránya is a fal felé a mozgás során.

.20) Mekkora szöget zárhat be a fallal az *érdes* falnak támasztott létra, hogy a talajon el ne csússzon. A nyugalmi súrlódási együttható a talajon μ_1 a fal és a létra között μ_2 . (Legyen $\mu_1 = 0,5$, $\mu_2 = 0,4$.) (**$\alpha \leq 51,34^\circ$**)

A megcsúszás egyszerre következik be a falon és a talajon, így az ezt megelőző határhelyzetben a súrlódási erők maximálisak. Ha a talajon T a merőleges tartóerő, akkor itt a súrlódási erő $\mu_1 T$, emiatt a fal merőleges nyomóereje is ennyi. Ezért a falnál a súrlódási erő $\mu_1 \mu_2 T$.

A függőleges erőegyensúlyból T számolható.

Ezután egy forgatónyomatékos egyenlet szükséges, amiből a rúd fallal bezárt szögére a megcsúszáskor egyszerű trigonometrikus egyenlet adódik. $\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{2\mu_1}{1-\mu_1\mu_2}$.

.21) Mekkora szöget zárhat be a fallal a falnak támasztott létra, hogy az a személy, akinek súlya a létra súlyának k -szorososa fölmelessen a létrán anélkül, hogy a létra elcsúszna. A nyugalmi súrlódási együttható a talajon μ_1 , a fal és a létra között μ_2 . (Legyen $k = 2$, $\mu_1 = 0,5$, $\mu_2 = 0,4$.) (**max. 32,01°**)

A gondolatmenet az előzőhöz hasonló. A T erőre $T = \frac{k+1}{1-\mu_1\mu_2} mg$ adódik, amit a forgatónyomatékos egyenletbe téve $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2(k+1)\mu_1}{2k+1-\mu_1\mu_2}$ következik. Érdekes ellenőrizni, hogy $k=0$ -ra az előző feladat eredményét adja.

.22) Bizonyos hajlásszöggel az érdes falhoz van támasztva egy m tömegű rúd, ami nem csúszik meg. A tapadási súrlódási együttható a talajon 0,5, míg a falnál 0,4. A rúd és a fal szögére: $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$.

a) Számítsuk ki a falnál és a talajon ható erőket. (???)

b) Mi a legkisebb lehetséges legkisebb és legnagyobb értéke a talaj merőleges tartóerejének? (**0,9167mg; 1,125mg**)

A rúdra hat a talajon T tartó és S_1 tapadási súrlódási erő, míg a falon F nyomó és S_2 tapadási súrlódási erő. Erre a 4 ismeretlenre az egyértelmű megoldáshoz 4 egyenletre lenne szükségünk.

Az első két egyenlet adódik a $\Sigma F=0$ -ból vízszintes és függőleges komponenseit tekintve. A harmadik egyenlet adódik $\Sigma M=0$ -ból valamely tengelyválasztás esetén.

Bármely más tengelyválasztással is próbálkozunk $\Sigma M=0$ -ból újabb egyenletet felírni, ámde! az új egyenletünk ekvivalens lesz a harmadik egyenlettel. Így bár négy egyenlet lesz, de ezek nem adnak egyértelmű megoldást, mert „összefüggő” egyenletek, így **végtelen sok megoldása lesz** az egyenletrendszernek, **nem csak egyféle erőnégyes lehetséges!!**

Nem lehet mást tenni, le kell mondani az egyértelmű megoldásról, és egyik ismeretlent paraméternek tekintve, megoldani a három egyenlet egyenletrendszerét a másik három ismeretlenre. Pl. ha T a paraméter, akkor $S_2 = mg - T$; és $S_1 = F = (T - mg/2) \operatorname{tg} \alpha$ adódik. Természetesen ezen megoldásokat még korlátozni kell azzal, hogy alá kell vetni a meg nem csúszás feltételeit jelentő $S_1 \leq 0,5T$ illetve $S_2 \leq 0,4F$ feltételeknek.

Végül $0,9167mg \leq T \leq 1,125mg$ adódik.

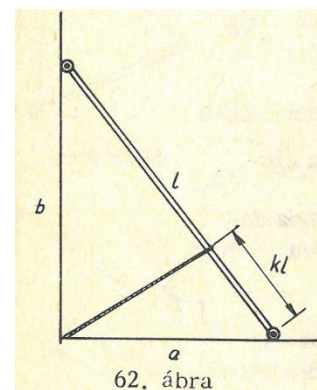
.23) Merőlegesen falszöglethez ℓ hosszúságú, végein görgőkkel ellátott rúd támaszkodik (sem a falnál, sem a talajon nem számolunk súrlódással). A rúd elcsúszását a rúdhoz és a falszöglethez kötött fonál akadályozza meg. A rúd alsó vége a szöglettől a , a felső vége b távolságra van. A fonál a rúd alsó végétől $k\ell$ távolságra van a rúdhoz erősítve.

a) Mekkora erő feszíti a fonalat, mekkora erővel nyomja a rúd a talajt, illetve a falat?

Legyen $k=1/3$, $a = 4$ m, $b = 15$ m. $\left[\frac{17}{30} mg; \frac{45}{30} mg; \frac{8}{30} mg \right]$

b) k milyen értékeinél lehetséges egyensúly? ($k < 1/2$)

c) *Határozzuk meg az erőket csak szerkesztéssel!



a) A geometria ismert, a kótel talajjal bezárt ϕ szöge számolható: $\operatorname{tg} \phi = 15/8$. (hasonló derékszögű háromszögek)

$\Sigma M=0$, tengelynek célszerű választani a kótel valamelyik végpontját (a bal végpontot is lehet!). Ebből a talaj T tartóereje és a fal N nyomóereje között kapunk egy összefüggést.

$\Sigma F=0$ miatt az erők zárt vektorháromszögeből T és N között ismét egy összefüggés adódik.

Az egyenletrendszer megoldható,

b) A kótel jobb végénél lévő P pont milyen pályát írna le, ha a rudat a függőleges falnak támasztott helyzetéből engedve hagynánk elcsúszni?

$k = 1/2$ esetén a Thalesz-tétel megfordítása miatt éppen körpálya adódna.

$k \neq 1/2$ esetén a pálya ellipszis lesz. U.i, ha a jelöli a rúd és a fal szögét, P pont faltól való távolsága x_0 , a talaj fölötti magassága pedig y_0 , akkor a derékszögű háromszögek miatt $\sin \alpha = \frac{x_0}{(1-k)\ell}$ és $\cos \alpha = \frac{y_0}{k\ell}$. Ezek négyzetösszege 1.

Így a P pont pályája az $\left(\frac{x_o}{(1-k)l}\right)^2 + \left(\frac{y_o}{kl}\right)^2 = 1$ egyenletű ellipszis, melynek centrum a falsarok, vízszintes tengelye kl , függőleges tengely $(1-k)l$.

Ha a vízszintes tengely a hosszabb ($k > 1/2$), akkor az elcsúszás alatt a P pont folyton távolodna a saroktól, amely mozgást a megnyúlni nem képes kötél megakadályoz.

.c) Tekintsünk a rúdra úgy, mintha rá 3 erő hatna: A fal N nyomóereje, a K kötélereje illetve az az E erő, ami az mg és a talaj T tartóerejének eredője.

- Ahol az eredeti geometria által meghatározott ábrában N és K hatásvonala egymást metszi, ott át kell mennie a függőleges E erő hatásvonalának is.

- Feladat az E eredő hatásvonalának, az egyik összetevőnek (mg) és a másik összetevő hatásvonalának ismeretében megszerkeszteni a másik összetevőt (T), és az E eredőt. Az mg erővektor hossza tetszőlegesen vehető fel. A többi erővektor hosszát ehhez viszonyítva fogjuk megkapni.

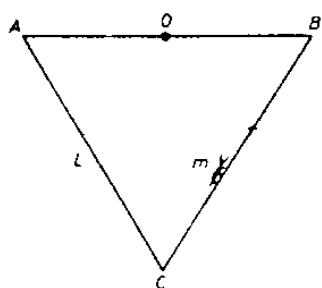
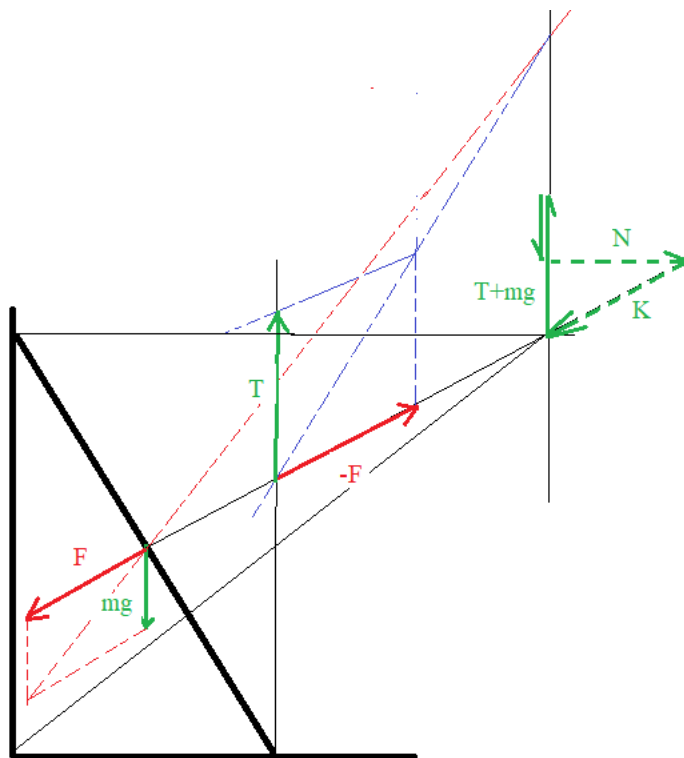
- Mivel T , mg és E hatásvonala nem metsző, ezért felvesszünk két segéderőt F és $-F$ közös hatásvonallal, mely a rúd közepén és az N és K hatásvonalainak metszéspontján megy át. Az F erőt az mg támadáspontjából indítjuk, a $-F$ erőt pedig ott, ahol a T erő hatásvonalát metszi mg és E támadáspontjait összekötő egyenes.

- Összevonjuk az mg erőt az F erővel, illetve a $-F$ erőt a szerkesztendő T erővel. Ezek eredője szintén E lesz.

- Az mg és F eredőjének hatásvonal elmetezi E hatásvonalát. A metszéspontot összekötve $-F$ támadáspontjával, adódik T és $-F$ eredőjének hatásvonala. Ebből kiszkeresztjük a T erővektort.

- T erővektorhoz mg vektorát adva adódik E vektor, melyet felmérünk N és K egyenesének metszéspontjához.

- Felbontjuk az E vektort N és K összetevőire. Hosszukat mg hosszához mérve adódnak N és K nagyságai „ mg ” egységekben.



.24) Az ábrán látható egyenlő oldalú háromszög minden oldala l hosszúságú, m tömegű homogén rúd. A háromszög az egyik oldal középpontján átmenő vízszintes tengely körül szabadon foroghat. Egy m tömegű bogár a C ponttól lassan elmászik a B pontig. Mennyi energiájába kerül ez a kaland (mekkora a munkavégzése)? **(0,7321 mgl)**

A bogár munkavégzése növeli meg a rendszer helyzeti energiáját.

A közös tömegközéppont függőleges elmozdulását kell kiszámolni.

Ha K a háromszög középpontja, akkor a közös tömegközéppont (T) kezdetben KC

szakasz felső negyedelőpontja, a végén pedig KB szakasz bal oldali negyedelőpontja.

Az OT szakasz hossza az OKB derékszögű háromszögből számolható (Thalesz-tétel megfordítása): $l/4$.

.25) Az asztal szélére, a szélén túlnyúló ferde tornyot építünk egyforma pénzérmékből úgy, hogy minden érmét az alatta lévőhöz képest kifelé elcsúsztatunk. Célunk, hogy a legfelső érme e lehető legjobban kilógjon az asztal széléhez képest.

.a) Megvalósítható-e, hogy a legfelső pénzérmének már egyetlen pontja se legyen az asztal fölött? Ha igen, hány érmét kell ehhez felhasználni? **(4)**

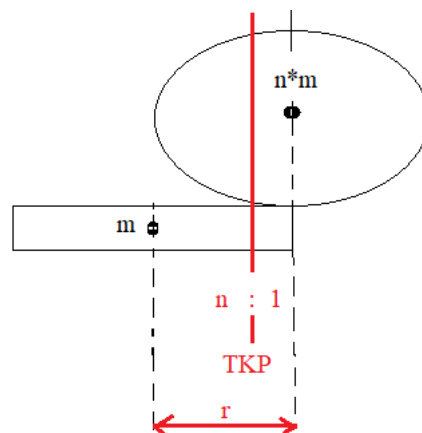
.b) Megvalósítható-e, hogy a legfelső, r sugarú pénzérme külső pontja az asztal szélétől $4r$ távolságra legyen? **(igen, 31 érmével)**



.c) *Elegendően sok érmét használva mi az a legnagyobb távolság, amivel a torony oldalra kinyúlhat az asztal széléhez képest? **(bármekkora)**

.a) Egy db érme esetén a kinyúlás legfeljebb r , mert az érme TKP-jának az asztal fölött kell maradnia. (különben lebillen a nehézségi erő forgatónyomatéka miatt)

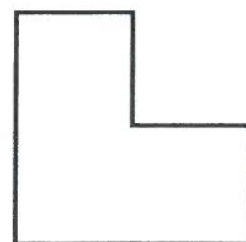
Két érme esetén is a közös TKP-juknak az asztal fölött kell maradnia, ám ez a közös TKP a második érme szélétől balra van $\frac{1}{2}r$ távolságban, tehát az asztal szélétől jobbra $r + \frac{1}{2}r = \frac{3}{2}r$ távolságra nyúlik ki a torony. Folytassuk a gondolatmenetet! 4 érme esetén a teljes kinyúlás már $r(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = 2,083r$.



.b) Általában: A felső (jobbra kinyúló) n db érme együttes TKP-jába $n*m$, míg a közvetlenül őket tartó $n+1$ -edik érme középpontjába m tömeget képzelve, az $n+1$ db érme együttes tömegközéppontja $n:1$ arányban osztja a köztük lévő távolságot. Azonban ez a távolság éppen r , hiszen az alsó érme külső szélét éppen az nd felső érme együttes TKP-je alá tesszük. Így, mivel az $n+1$ db érme TKP-ja éppen az asztal szélén van, ezért a legsó érme becsúsztatásával a felső rész $r/(n+1)$ távolsággal csúszhat kijebb. Az n érméből álló torony teljes kinyúlása: $r(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$. Excel táblázattal gyorsan számolható.

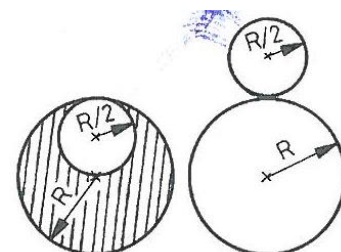
.c) Ez egy nehéz kérdés! Matematikailag megmutatható, hogy a fenti összeg bármely előre adott távolságnál nagyobb lehet. [„Ez a végtelen (hiperharmonikus) sor divergens, határértéke végtelen.”]

.26) Vékony lemezből készült négyzet egyik negyede hiányzik. Hol van a tömegközéppontja (súlypontja)? **(Az átlón a $\frac{a\sqrt{2}}{12}$ -re a négyzet középpontjától)**



Ötlet1: Rakjuk össze három azonos tömegű négyzetből. Először a két szemben lévő egymással.
Ötlet2: Ha még egy kis négyzetet hozzátennénk, egy nagy négyzetet kapnánk. A hiányzó kicsi négyzet TKP-ját kell $\lambda = -1/3$ arányban kicsinyíteni a nagy négyzet középpontjára vonatkozóan.

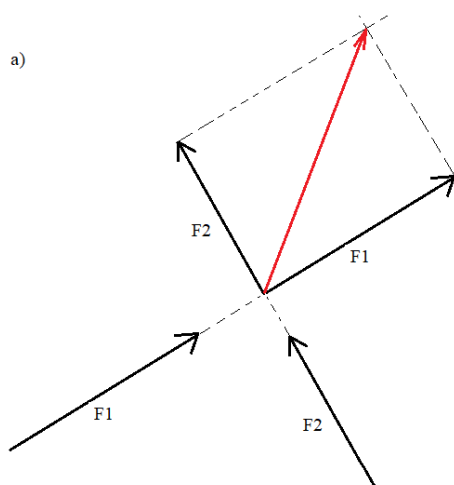
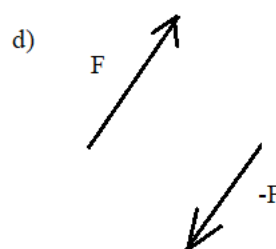
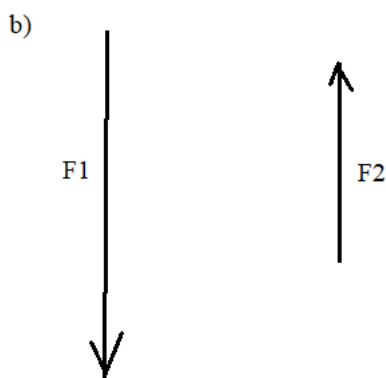
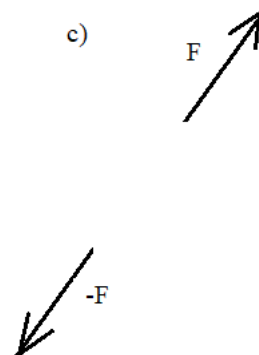
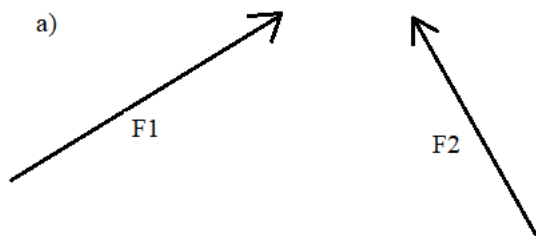
.27) Határozzuk meg az ábrán látható lemezidomok tömegközéppontját!
**(A két kör egyenesén, a középponttól $R/6$ távolságra;
 $0,3R$ a nagyobb középpontjától felfelé)**



Ötlet: A kivágott körlap és a sátozott rész közös tömegközéppontja a nagy kör középpontjában van. A sátozott és a kivágott rész tömegaránya $(4-1):1$. A fehér köröknél $1,5R$ oszlik fel $4:1$ arányban.

.28) Szerkesszük meg merev testre ható 2 db megadott erőt helyettesítő eredőt!

(Azt az egy erőt, ami gyorsító- és forgató hatás szempontjából is helyettesíti a megadottakat.)



Az eredő csakis az adott erők vektori összege lehet. Kérdés csak a hatásvonal.

.a) Metsző hatásvonalú erők eredőjének a hatásvonalát átmeny az eredeti hatásvonalak metszéspontján.

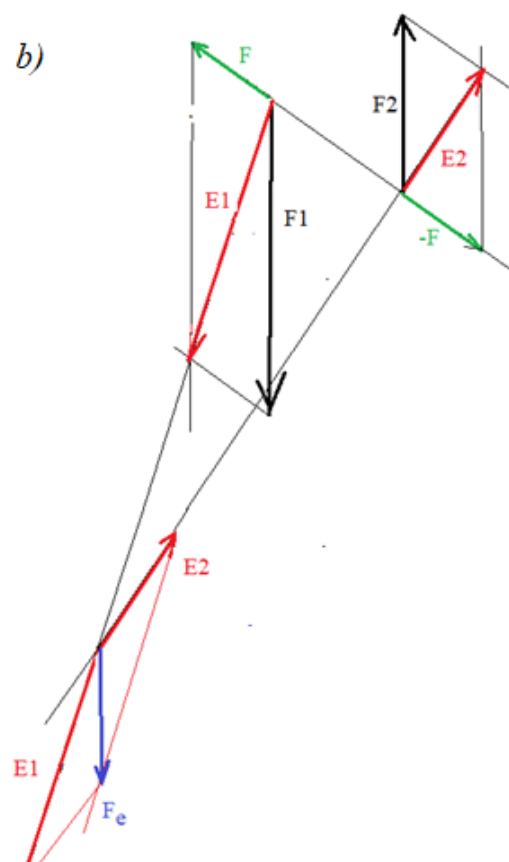
.c) Közös hatásvonalú, ellentétes, egyenlő nagyságú erő eredője

nullvektor. (hiszen összegük nullvektor, és forgatónyomatékaik eredője is 0.) Ilyen párok a hozzávétele bármely erőrendszerhez, nem változtatja meg az eredő hatást, így az eredő erőt sem.

.b) Eredetileg párhuzamos hatásvonalak esetén két egyenlő nagyságú, ellentétes irányú, közös hatásvonalú erőt veszünk fel, egyiket az egyik, másikat a másik eredeti erővel egyesítjük, majd az egyesített erők eredőjét keressük.

.d) „Erőpár” (a két erő egymás ellentettje, különböző hatásvonalal)

eredője – ha létezne – csak nullvektor lehetne, de annak forgatónyomatéka is 0 lenne. Ezen erőké pedig nem az, mert hatásvonaluk nem közös. „Erőpárt” a hatás szempontjából **nem helyettesíthetünk egyetlen erővel!**

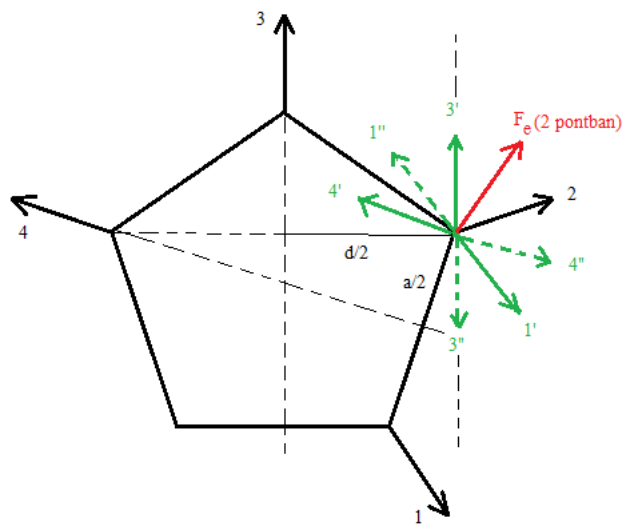


.29) Az R sugarú körbe írt szabályos ötszög alakú síklap 4 db csúcsánál kifelé, a szimmetriatengely mentén azonos F erők hatnak. Összegezzük ezeket a hatás szempontjából úgy, hogy...

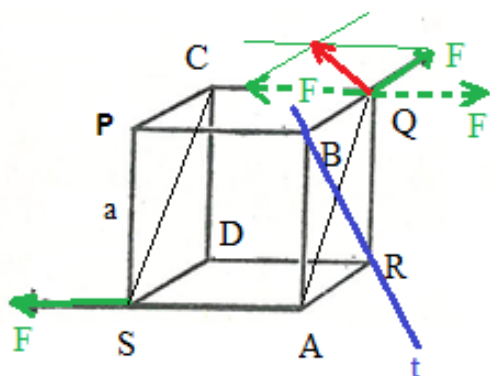
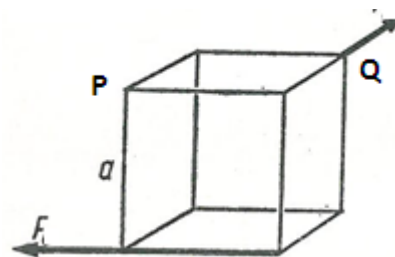
- .a)** ... az ötszög 5. csúcsában hasson egy erő, és az ötszög síkjára merőleges tengelyű alkalmas forgatónyomaték hasson az eredeti erők helyett. Mekkora a forgatónyomaték nagysága? (**F, az 5. csúcsból a középpont felé; $M=0$**)
- .b)** ... az egyetlen erő az ötszög egyik olyan csúcsában hasson, ahol eredetileg F erő hatott. Mekkora ez az erő és mekkora az e mellé szükséges forgatónyomaték nagysága? (**F, az 5. csúcsból a középpont felé húzott félegyenessel egyirányú; $M = -Fa$, a tengely merőleges az ötszög síkjára**)

.a) A 4 erőt hatásvonalára mentén eltolva a középpontba, ott összeadjuk, majd az eredőt kitoljuk az 5. csúcsba. (A szimmetria miatt a középpontból csúcsok irányába mutató azonos nagyságú 5 db erő összege nullvektor lenne.)

.b) Az ábrán a 2. csúcsba fogjuk elhelyezni a keresett erőt. Az 1., 3. és 4. csúcsokban ható erők miatt felvesszünk a 2. csúcsban a 1 erővel egyenlő $1'$ erőt és ennek $1''$ ellenerejét is. Ugyanígy keletkeznek $3'$ és $3''$, továbbá $4'$ és $4''$ is. Összeadjuk most az $1'$, 2 , $3'$, $4'$ erőket. Ezek vektorösszege a korábbiak miatt egy 5 jelű erő, mely szintén F nagyságú és egyirányú az 5. csúcsból a középpont irányába húzott vektorral. Emellett azonban maradt még három erőpár forgatónyomatéka (1 és $1''$; 3 és $3''$; 4 és $4''$), melyek rendre $+Fd/2$; $-Fd/2$; $-Fa/2$, ahol d az ötszög átlójának hossza, a pedig az oldala. Mivel a mostani, a 2. csúcsba tolt eredő nem megy át a lemez TKP-ján, ezért van forgató hatása a TKP körül (negatív), ezt rontja le a mellé rendelt forgatónyomaték.



- .30)** Az a élhosszúságú kocka két kitérő élében F erők hatnak. A hatás szempontjából helyettesítsük ezeket az erőket a Q pontban ható egyetlen erővel és alkalmasan választott –erőpárral megvalósított- forgatónyomatékkal. Mekkora a Q pontban ható erő és mekkora a forgatónyomaték, milyen a tengely állása? (**$\sqrt{2}F$; $Fa\sqrt{2}$; BR irányú**)



A bal alsó F erőt „áthelyezzük” a Q ponthoz úgy, hogy vele egyenlő erővektort veszünk fel Q pontnál, és egy ezzel ellentétes erőt is felvesszünk ugyanott. Ezen két erő hozzávétele a rendszerhez, nem változtat az erőrendszer eredőjén.

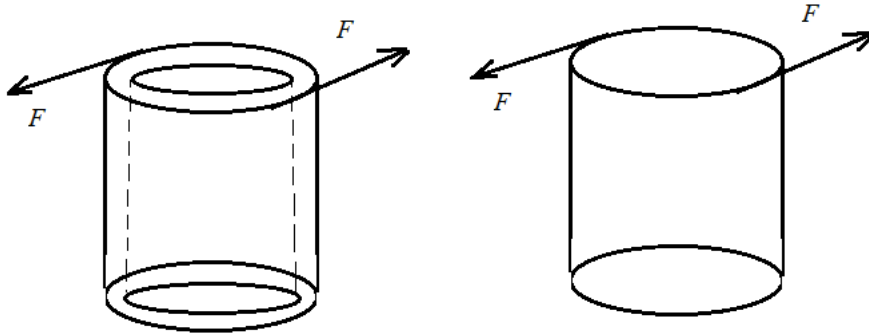
Most pedig az eredeti bal alsó erő a második segéderővel alkotja a keresett erőpárt, míg a másik két erővektort összeadva, kapjuk a keresett erőt. Az erőpár forgatónyomatékának tengelye merőleges az őket tartalmazó AQCS síkra.

- .31)** Borítsuk fel a kockát és a szabályos tetraédert az egyik élén keresztül, a lehető legkisebb erővel, ha az adott él a síkon nem csúszik meg. Az erőt a felszín valamely szimmetriasíkon lévő pontjában fejtjük ki. Hol hat a lehető legkisebb erő, mekkora a nagysága és milyen az iránya, ha a test homogén anyagú, és tömege m ? (Segítség: A szabályos tetraéder TKP-ja a testmagasságok metszéspontja, ami minden magasságnak a laphoz közeli negyedelőpontja.) (**kocka: $F = mg/\sqrt{2}$, tetraéder: $F = mg/3$**)

A borításkor a nehézségi erőnek a síkon maradó élre számított forgatónyomatékát kell lerontania a húzóerő nyomatékának. Előbbi fix, utóbbi pedig $F \cdot r \cdot \sin \phi$ szorzat alakjába írható (ahol r a TKP és az F erő támadáspontjának távolsága, ϕ pedig az F erő és az r szakasz szöge). F minimális lehet, ha r és ϕ egymástól függetlenül tud maximális lenni. Tehát r legyen a lehető leghosszabb, ϕ pedig 90° .

.32) *A súrlódásos síkon áll egy hengerszerű test (vékonyfalú cső vagy tömör henger). Az ábra szerint egy, a vízszintes síkban ható és a paláston támadó erőpárral szeretnénk megforgatni. Mekkora a szükséges erők? (cső: $\mu mg/2$; henger: $\mu mg/3$)

(Segítség: Ha a koordináta-rendszerben megrajzoljuk az $f(x)=x^2$ függvény grafikonját, illetve egy téglalapot, melynek egyik csúcsa az origó, a vele szemközti csúcsa pedig a grafikonon tetszőleges pontja, akkor a téglalap területének $1/3$ része esik a (parabola)görbe alá.)



A súrlódási erő felületi erő, az érintkezési felület bármely kicsi területű részén hat, nagysága arányos a terület nagyságával. Ezek forgatónyomatékainak összegét kell semlegesítenünk az erőpárral.

Vékonyfalú (Δx) csőnél felosztjuk a 2π szögtartományt kicsi (!) $\Delta\phi$ nagyságú szögekre. A $\Delta\phi$ középponti szöghöz tartozó körgyűrűcikk területe $\Delta\phi \cdot r \cdot \Delta x$, emiatt az itt ébredő súrlódási erő $\Delta F = \Delta\phi \cdot r \cdot \Delta x / (2r\pi\Delta x) \cdot \mu mg$, ennek forgatónyomatéka a középponton átmenő függőleges tengelyre: $\Delta M = \Delta F \cdot r = 1/(2\pi) \cdot \mu mgr \Delta\phi$. Ezen járulékokat kell összegeznünk. Az összeg: $M_{súrl} = \mu mgr$. Ez tart egyensúlyt a ketresett erőpár $F \cdot 2r$ forgatónyomatékával.

Hengernél előbb koncentrikus körgyűrűkre osztjuk a felületet, majd azokat cikkekre az előzőek szerint. Az x sugarú Δx szélességű körgyűrűcikk területe $\Delta t = x \cdot \Delta\phi \cdot \Delta x$, erre ható súrlódási erő $\Delta F = \Delta t / (r^2\pi) \cdot \mu mg$, aminek forgatónyomatéka: $\Delta M(x, \Delta x, \Delta\phi) = \Delta F \cdot r = \frac{\mu mg}{r^2\pi} x^2 \Delta x \Delta\phi$. Ezt összegezzük először az x sugarú körgyűrűre (azaz ϕ szerint), : $\Delta M(x, \Delta x) = \frac{\mu mg}{2r^2} x^2 \Delta x$, majd ezt kell összegezni az összes körgyűrűre (azaz x szerint). Ez szemléletesen a koordináta-rendszerben az $f(x)=x^2$ függvény, 0-tól r -ig számított görbéje „alatti terület”-nek a $\frac{\mu mg}{2r^2}$ -szerese. Adódik: $M_{súrl} = 2\mu mgr/3$.

Ez tart egyensúlyt a keresett erőpár $F \cdot 2r$ forgatónyomatékával.