

## 6- Munka, energia

$g=10 \text{ m/s}^2$  legyen!

### Tömegpont, pontrendszerek

**.1)** Függőleges falú edénybe vizet töltünk. Hány százalékkal növeljük meg ezután a vízoszlop magasságát, hogy a víznek az alaplap szintjéhez viszonyított helyzeti energiája a kétszeresére nőjön? **(41%)**

A víz teljes tömege a  $h$  magassággal egyenesen arányos. Az átlagmagasság (a víz tömegközéppontjának a lap fölötti magassága  $h/2$ ) a  $h$  magassággal szintén egyenesen arányos. Így a helyzeti energia a  $h^2$ -tel arányos.

**.2)** Egy oxigénmolekula tömege  $53,4 \cdot 10^{-24} \text{ g}$ , átlagos sebessége  $0^\circ\text{C}$ -on  $460 \text{ m/s}$ . Mennyi a molekulák összes mozgási energiája a haladó mozgása miatt  $1 \text{ mol}$  gázban, ahol  $6 \cdot 10^{23}$  molekula van? (pl.  $0^\circ\text{C}$ -on,  $10^5 \text{ Pa}$  nyomás mellett  $22,4$  liter térfogatban) **(3,39 kJ)**

$$E = \frac{1}{2} mv^2.$$

**.3)**  $1$  tonnás tömeget milyen magasról kellene leejtenünk, hogy  $1 \text{ kWh}$  legyen a mozgási energiája a földetéréskor? **(360 m)**

$1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s}$ , a helyzeti energia mozgásivá alakul a leeséskor.

**.4)** Fába  $500 \text{ m/s}$  sebességgel belelőtt puskagolyó  $3 \text{ cm}$  mélyen hatol be. A fékező erő az út során állandó. Ezzel a puskával  $1 \text{ cm}$  vastag deszkát lövünk keresztül. Mekkora sebességgel távozik a lövedék? **(408 m/s)**

Ötlet1: A  $3 \text{ cm}$ -es szakaszra felírt munkatételből a fékezőerő számolható. Majd munkatétel az  $1 \text{ cm}$ -es szakaszra.

Ötlet2: A fékezőerő negatív munkája a munkatétel szerint a mozgási energiát csökkenti, mégpedig a fékezőerő állandósága miatt az úttal egyenes arányban. A  $3 \text{ cm}$ -en teljesen elvesző kezdeti mozgási energiából az  $1 \text{ cm}$ -es szakaszon csak harmada vész el, kétharmada megmarad. Így  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  szorosára változik a sebesség.

**.5)** Vízszintes asztallapon meglökött könyv állandó lassulással mozog, sebessége  $24 \text{ cm}$ -es csúszás után csökken a felére. Mekkora utat tesz még meg a megállásig? **(0,08 m)**

Ötlet1: A  $24 \text{ cm}$ -es szakaszra felírt munkatételből a fékezőerő számolható. Majd munkatétel az hátralévő szakaszra.

Ötlet2: A fékezőerő az úttal egyenes arányban „fogyasztja” a mozgási energiát. A  $24 \text{ cm}$ -en a háromnegyede vész el. További egynegyede vesz el a megállásig.

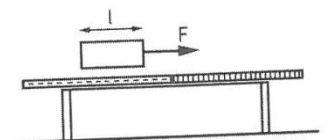
**.6)** Mekkora munkát végzünk, ha a  $30^\circ$ -os hajlásszögű,  $5 \text{ m}$  magasságú súrlódásmentes lejtőn vízszintes erővel, egyenletesen a lejtő tetejére juttatunk egy  $10 \text{ kg}$  tömegű testet? **(500 J)**

Ötlet1: A nehézségi erőt két komponensre bontva, annak  $mg \sin \alpha$  nagyságú lejtőirányú komponensét kell egyensúlyoznia a vízszintes húzóerő lejtő irányú  $F_1$  komponensének. Az irányába eső elmozdulás  $h/\sin \alpha$ .

Ötlet2: A lejtő egy tipikus egyszerű gép, mellyel munkát nem „takaríthatunk meg”. Azaz a munka akkora, mintha függőlegesen emelnénk:  $mgh$ .

**.7)** Két asztal áll szorosan egymás mellett, amint azt az ábra mutatja. Az asztalok különböző anyagúak, a súrlódási együtthatók különbözőek.  $m = 20 \text{ kg}$ ,  $\mu_1 = 0,1$ ,  $\mu_2 = 0,4$ ,  $l = 0,5 \text{ m}$ .

Mennyi munkát végzünk, amíg az egyik asztalon levő homogén anyageloszlású



csomagot a másikra egyenletesen áthúzzuk? **(25J)**

Osszuk a csomagot két részre, melyek az egyes asztalukon állnak. Az eredő súrlódási erő is a két asztalon ébredő erők összege. Mindkettő erő nagysága lineárisan függ az elmozdulástól, így a teljes összeg is.

Ezért a szélső értékek átlagával számolunk. A kezdeti  $\mu_1 mg$ -ről  $\mu_2 mg$ -re változik az elmozdulás alatt.

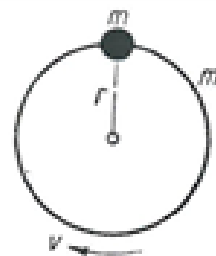
**.8)** Egy 5 m magasról vízszintes talajra ejtett labda minden visszapattanáskor elveszti ütközés előtti energiájának 19%-át. A közegellenállás elhanyagolható, a labdát pontszerűnek, az ütközést pillanatszerűnek tekinthetjük.

- a) Milyen magasra ugrik fel a labda a második visszapattanás után? **(3,28 m)**
- b) Ábrázoljuk a labda sebességét az elengedéstől eltelt idő függvényében, egészen a harmadik visszapattanásig!

- a) Kétszer egymás után (két pattanás) a mozgási (és abban a pillanatban ez a teljes mechanikai) energia 0,81-szeresére változik. A helyzeti energia a magassággal arányos.
- b) A sebesség nagysága 0,9-szeresére, iránya ellentétesre változik minden ütközéskor.

**.9)** Az  $m$  tömegű,  $r$  rádiuszú, rögzített tengely körül elfordulni képes abroncs kerületére ugyancsak  $m$  tömeget erősítünk. Mennyi ennek a tömegnek a sebessége, amikor felső helyzetéből elindulva legmélyebb helyzetén halad át, ha a tengely rögzítve van? **( $\sqrt{2Rg}$ )**

Az abroncs helyzeti energiája nem változik, a nehezéké csökken. Ez fedezi a végső mozgási energiát, mely az összes pont (abroncs pontjai és nehezék) azonos  $v$  sebességéből adódik, azaz  $\frac{1}{2} (2m)v^2 = mg2R$ .

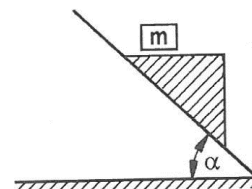


**.10)** Ejtőernyős kiugrik egy 2000 m magasban szálló repülőgépből. A gép vízszintes sebessége  $100 \frac{m}{s}$ . Az ejtőernyős sebessége a földet éréskor  $5 \frac{m}{s}$  tömege ejtőernyővel együtt 100 kg. Mennyi munkát végzett a közegellenállás? **(-2,499 MJ)**

Használjuk a munkatételt.

**.11)** A  $30^\circ$ -os hajlásszögű lejtőre helyezett ék és annak vízszintes lapján levő 0,1 kg tömegű kocka együtt gyorsulva mozog a lejtőn lefelé. Indulás után 2 s-mal a közös sebességük  $6,5 \frac{m}{s}$ . Ezen 2 s alatt a lejtő által az ékre ható súrlódási erő munkája -6,8 J.

- a) Mekkora az ék tömege? **(0,498 kg)**
- b) Mekkora a kockára ható súrlódási erő? **(0,281N)**

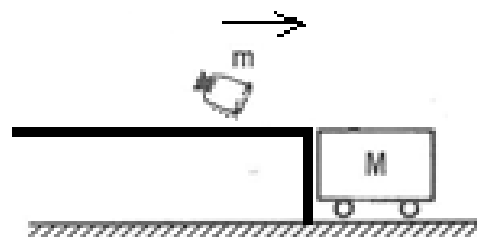


- a) A lejtővel párhuzamos, állandó gyorsulás számolható:  $3,5 \text{ m/s}^2$ .  
Ebből egyfelől a lejtőn mért elmozdulás 6,5 m; másfelől - a dinamika alaptörvénye szerint - a lejtőn mért csúszási súrlódási együttható 0,202.  
Ezután a megadott munkavégzésből a csúszási súrlódási erő, majd abból a lejtő és ék közös tömege számolható.

- b) Az ismert gyorsulásvektorú kockára ható erőket vizsgálva, a vízszintes gyorsuláskomponenst csak a tapadási súrlódási erő okozza.

**.12)** Az ábrán látható nyugvó, 50 kg tömegű kocsira 30 kg tömegű homokzsák csúszik kezdeti  $2 \frac{m}{s}$ , vízszintes sebességgel és rajta marad.

- a) Mekkora munkát végzett a zsák a kocsin? **(14,06 J)**
- b) Mekkora munkát végzett a kocsi a zsákon? **(-51,56 J)**
- c) Mekkora a rendszer belsőenergia-növekedése? **(37,5J)**



A végső közös sebesség a lendületmegmaradásból adódik.

a) A kocsira munkatételt írunk fel.

- .b) A zsákra munkatételt.  
 .c) A hiányzó mozgási energia vált belső energiává.

**.13)** Az előző feladat által felvetett kérdés:

Ha egy pontrendszer mozgását *inerciarendszerből* vizsgáljuk, akkor ott a munkatételt érvényben levőnek találjuk. Áttérve egy olyan vonatkoztatási rendszerre, amely az eredeti rendszerhez képest állandó  $u$  sebességgel halad, *érvényben marad-e a munkatétel az új rendszerben is* (annak ellenére, hogy ott mások lesznek a tömegpontok látszó sebességei, így mozgási energiái is)? **(igen)**

Mivel a pontrendszerre felírt munkatétel az egyes tömegpontokra felírt munkatételek összege, ezért *elegendő belátni*, hogy *egyetlen tömegpontra* felírt munkatétel érvényben marad, ha az új rendszerre térünk át.

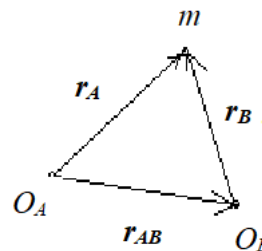
Legyen az  $A$  rendszerben a tömegpont helyvektora  $r_A$ , sebessége  $v_A$ , a  $B$  rendszerben  $r_B$ , sebessége  $v_B$ .

Ekkor az ábra szerint fennáll  $r_A = r_{AB} + r_B$ .

Mindkét oldal megváltozását véve:  $\Delta r_A = \Delta r_{AB} + \Delta r_B$ , majd a változás rövid  $\Delta t$  időtartamával osztva:  $v_A = u + v_B$ .

Változást követően a vektorok új értékeit vesszővel jelölve:

$$r'_A = r'_{AB} + r'_B \quad \text{és} \quad v'_A = u + v'_B.$$



Az  $A$  rendszerben érvényes a munkatétel:  $\Delta E_A = W_A$ , azaz  $1/2m(v'_A)^2 - 1/2m(v_A)^2 = F \Delta r_A$ .

$A$   $B$  rendszerben a mozgási energia megváltozása:  $\Delta E_B = 1/2m(v'_B)^2 - 1/2m(v_B)^2$  ezt átalakítva:

$$1/2m(v'_A - u)^2 - 1/2m(v_A - u)^2 = 1/2m[(v'_A)^2 - (v_A)^2 - 2u(v'_A - v_A)] = \Delta E_A - mu(v'_A - v_A)$$

valóban eltér az  $A$ -beli mozgási energiától.

Az eltérés  $mu(v'_A - v_A) = u(mv'_A - mv_A) = u(I'_A - I_A) = u \Delta I_A$ . Az erő definícióját felhasználva az eltérés éppen  $uF \Delta t$ .

$B$ -ben a munkavégzés:

$$\Delta W_B = F \Delta r_B = F(\Delta r_A - \Delta r_{AB}) = \Delta W_A - F \Delta r_{AB} = \Delta W_A - Fu \Delta t.$$

(Galilei elve szerint az  $A$ -hoz képest állandó sebességű  $B$  is inerciarendszer, így tehetetlenségi erők híján nincs különbség a ható erők között, ezért nem indexeljük.)

Tehát a munkatétel mindkét oldala megváltozik áttéréskor, de ugyanannyival.

**.14)** A 200 kg tömegű testet egy emelő-berendezés 5 s alatt 8 m magasra emeli. Az út első felében a mozgás egyenletesen gyorsuló, a második felében egyenletesen lassuló. A kezdősebesség zérus. Az első szakaszon a gyorsulás duplája a második szakaszbeli lassulásnak.

- Ábrázoljuk az emelőerőt az idő függvényében.
- Határozzuk meg az átlagteljesítményt. **(3200 W)**

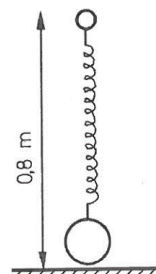
- Mindkét szakaszon a sebesség lineárisan változik, a sebességgrafikon alatti terület az elmozdulás. A max. sebesség 3,2 m/s.

Az emelő erő a dinamika alapegyenletéből adódik, a nehézségi erőt is figyelembe véve (2384 N és 1808 N). A pillanatnyi teljesítmény  $F_{emelő} \cdot v(t)$ , ami az első szakaszon 0-tól 7629 W-ig, a másodikon 5786 W-tól 0-ig változik, lineárisan.

- Összegezzük a  $P(t)$  grafikon alatti területet és osszuk el az idővel, avagy ....  
 ....az összes mechanikai energianövekedésből számolható (helyzeti) az eredő erő átlag teljesítménye, amiből levonandó a nehézségi erő átlagteljesítménye (ami negatív).

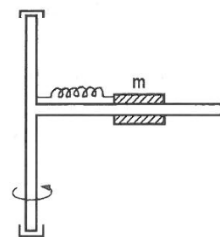
**.15)** Egy rugó nyugalmi hossza 0,8 m rugóállandója  $25 \frac{N}{m}$ . A rugó alsó végére a földön fekvő, 1,5 kg tömegű testet erősítettünk. A rugó felső végét függőlegesen a test felett tartjuk, 0,8 m magasságban. Ezután lassan felemeljük a rugó felső végét 0,8 m-ről 1,7 m magasságba.

- Számítsuk ki az emelés során végzett munkát! **(9 J)**
- Ábrázoljuk az emeléshez szükséges erőt a felső rugóvég elmozdulásának függvényében!
- Ábrázoljuk a rugalmas energiát az elmozdulás függvényében!



- a) A lassú (egyenletes) emelés miatt a test végig egyensúlyban van. Az első szakaszban végig az asztalon áll, közben a felső vég elmozdulásával egyenes arányban növvő rugóerő mellett lineárisan 0-ra csökken a tartóerő. Határhelyzetben a rugóerő és a nehézségi erő tart egyensúlyt, amiből  $x = 0,6$  m-es elmozdulás adódik. Ezután a rugó hossza, ereje, energiája állandó marad. A munka a két szakasz munkájának összege.
- b) Az erő lineárisan 15 N-ra nő 0,6 m alatt, majd állandó marad 0,9 m-ig.
- c) A rugalmas energia  $Dx^2$  függvény szerint nő az első szakaszban, majd állandó marad.

**.16)** Függőleges tengelyhez mereven hozzáerősítünk egy vízszintes rudat. A rúdra a vázlat szerint 0,2 kg tömegű testet fűzünk fel és rugóval kötjük a tengelyhez. A rugó feszítetlen állapotában 0,5 m-re van a test a forgástengelytől. A rugó 50 N erő hatására nyúlik meg 1 cm-rel.



- a) Mekkora lesz a test távolsága a forgástengelytől, ha a tengelyt  $10 \text{ s}^{-1}$  fordulatszámmal forgatjuk? **(0,594 m)**
- b) A tengely forgatásakor mekkora munkát végeztünk összesen, amíg a fenti fordulatszámot elértük? (Súrlódási veszteség nincs.) **(161 J)**
- c) A tengelyt a nyugalmi helyzetből forgatni kezdjük, egyre több munkát fektetve be. Elegendően sok idő alatt bármennyi munkát be tudunk fektetni, de teljesítményünk véges. Mekkora fordulatszámot érhetünk el? **(kevesebb mint  $25,16 \text{ s}^{-1}$ )**

- a) A szükséges centripetális erő a rugóótól származik:  $Dx = m(x + 0,5m)\omega^2$  lineáris egyenlet adja meg az adott szögsebességhez tartozó  $x$  rugó megnyúlást.
- b) A végzett munkánk az összenergiát növeli (rugalmas és mozgási).

- c) A fenti lineáris egyenlet szigorúan monoton növvő kapcsolatot ad  $x$  és  $\omega$  között. Ámde az egyenlet két oldalának ábrázolása mutatja, hogy megoldás csak addig van, amíg a jobb oldal grafikonjának  $m\omega^2$  meredeksége alatta van a bal oldal grafikonja  $D$  meredekségének. **Tehát  $\omega$ -nak van felső korlátja**, és miközben  $\omega$  ehhez közeledik alulról, addig az ehhez tartozó  $x$  megnyúlás nagyon nagy lesz, a „végtelenhez tart”. Ezzel együtt nekünk is végtelenbe tartó munkamennyiséget kell befektetnünk. Rugó nyújtása, forgási energia növelése:  $E_{\text{összes}} = \frac{1}{2} Dx_0(l_0 + 3/2 x_0)$

Így -bár  $x$  egyre nagyobb lesz ugyan, és a fordulatszám is nő - de sosem érheti el azt, amikor  $D = m\omega^2$ , ezért  $\omega^2$  mindig alatt marad  $D/m$  értéknek.

**.17)** A vízszintessel  $20^\circ$ -os szöget bezáró lejtőn 2 m/s állandó sebességgel csúszik lefelé egy láda. Egy adott helytől kezdve a lejtő felülete érdesebbé válik. Ezen a szakaszon a láda 3 m utat tesz meg a megállásig. Mekkora a súrlódási együttható fent és lent? **(0,364; 0,435)**

A felső szakaszon az erők a lejtő mentén (is) egyensúlyt tartanak, a fenti együttható ebből adódik. Az alsó szakaszon a munkatételből jön az együttható.

**.18)** Egy szánkópálya  $15^\circ$ -os hajlásszögű lejtő. A szánkón ülő ember és a szánkó együttes tömege 80 kg. A csúszási súrlódási együttható 0,05. A légellenállás a sebesség négyzetével arányos és 1 m/s sebességnél 0,2 N értékű.

- a) Mekkora sebességre gyorsul fel a szánkó? **(29,02 m/s)**
  - b) Mennyi ekkor a mechanikai energiaveszteség 1 s alatt? **(6005 J)**
- a) A légellenállás a sebességtől függ. A másik két erő nagysága állandó. Ha a légellenállás elég nagy lesz, egyensúly lesz, kialakul a maximális sebesség.
  - b) A mechanikai energiaveszteség a két disszipatív erő munkájának abszolútértéke. (Mivel a disszipatív erők a konzervatív nehézségi erővel megfelelő komponensével tartanak egyensúlyt, ez egyben a nehézségi erő munkája, azaz a helyzeti energia csökkenése is.)

**.19)** Lejtőn a súrlódási együttható  $\mu$ . Mekkora kezdősebességgel kell az  $\alpha$  hajlásszögű  $h$  magasságú lejtő tetejéről a testet lefelé indítani ahhoz, hogy a test ugyanakkora sebességgel érjen a lejtő aljára mintha az utat kezdősebesség nélkül, súrlódásmentesen tette volna meg?  $\left( \sqrt{\frac{2\mu gh}{\tan \alpha}} \right)$

A súrlódás nélküli lejtőn mechanikai energiamegmaradás teljesül, míg a súrlódásos lejtőn munkatétel.

**.20)** Egy 10 kg tömegű, 2 m hosszú fonálon lógó homokzsákba 10 g tömegű lövedék hatol vízszintesen, és benne is marad. A zsák  $10^\circ$ -kal lendült ki. Mekkora volt a lövedék sebessége? **(780,5 m/s)**

Előbb a geometriából az emelkedési magasságot számoljuk.

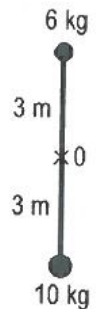
Majd a mechanikai energia-megmaradással az ütközés utáni közös sebességet.

Végül egy rugalmatlan ütközés lendület-megmaradással.

**.21)** Az ábra szerinti rendszer 0 tengely körül foroghat függőleges síkban (a rudak súlytalanok).

a) Mennyi munkavégzés árán lehet a szerkezetet  $180^\circ$ -kal elfordított helyzetébe átvinni? **(240 J)**

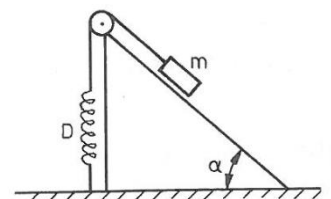
b) Ha ezután lebillen a szerkezet, mekkora sebességgel mennek át a testek az eredeti függőleges helyzeten? **(5,48 m/s)**



a) Alulról 4 kg tömeg jut 6 m-rel magasabbra.

b) Az energiaösszeg megmarad (mozgási- és helyzeti-).

**.22)** A  $30^\circ$ -os hajlásszögű lejtőn 3 kg tömegű test van, egy  $D = 80 \text{ N/m}$  rugóállandójú rugóhoz erősítve. Kezdetben a testet úgy tartjuk, hogy a rugó erőmentes legyen, azután hirtelen elengedjük. A súrlódás igen kicsi.



a) Milyen mélyre megy le a test a lejtőn? **(0,375 m)**

b) Hol áll meg a test, ha végül is az igen csekély súrlódás megállítja? **(0,187 m)**

a) A kicsi súrlódás és a rövid idő alatt a mechanikai energia megmarad. A legalacsonyabb helyzetben a mozgási energiája ismét 0 lesz. A helyzeti energia rugalmas energiává alakul.

b) (A súrlódási erő a negatív munkájával elveszi a rendszerből a mechanikai energiát.) Amikor már áll, egyensúlyba kerül, a súrlódás pedig közelítőleg nincs. Vizsgáljuk az erők egyensúlyát!

**.23)** Függőleges helyzetben alátámasztott,  $20 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$  irányítású erejű súlytalan rugóra, annak szabad végétől mért 1,8 m magasságból, 0,4 kg tömegű testet hajítunk lefelé. Mekkora kezdősebességgel kell a testet elindítanunk, hogy a rugó 20 cm-rel összenyomódjék? **(12,65 m/s)**

Nincs disszipatív erő, a mechanikai energia megmarad (mozgási- és helyzeti-, rugalmas).

**.24)** Függőleges helyzetben alátámasztott  $D$  rugóállandójú, súlytalan rugó felső végén  $M$  tömegű rugalmatlan test van. A rugó felső végétől  $h$  magasságból  $m$  tömegű testet ejtünk a rugóra. Mekkora  $v_0$  kezdősebességgel kell a testet elindítani, hogy a rugó  $h_0$  értékkel összenyomódjék, ha  $D = 20 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$ ,  $m = 0,4 \text{ kg}$ ,  $h = 1,8 \text{ m}$ ,  $h_0 = 20 \text{ cm}$ ,  $M = 0,5 \text{ kg}$ ? **(20,1 m/s)**

Visszafelé számoljunk, használva az energiamegmaradást! (A rugó kezdetben is össze volt nyomva!) Így adódik az ütközés utáni közös sebesség.

Az ütközés rugalmatlan, így adódik a test beérkezési sebessége (lendületmegmaradás).

Ebből pedig a felső kezdeti sebesség számolható (mech. energia-megmaradás).

**.25)** A 10 m-ről leeső, 50 kg-os cölöpverő kalapács 4 cm-rel verte be a 2 kg tömegű cölöpöt. Keressük, hogy mennyi a talaj ellenálló ereje?

a) Mi a hiba az alábbi gondolatmenetben?: A cölöp 0,04, a kalapács 10,04 cm-rel került alacsonyabbra. Helyzeti energiájuk együttes csökkenése egyenlő a talaj munkavégzésének ellentettjével. Így válaszként 125,52 kN adódik.



b) Mekkora a talaj által kifejtett erő? **(120,71 kN)**

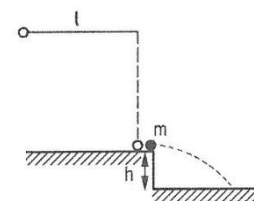
a) Gondoljuk végig, milyen energiaátalakulások zajlanak a folyamat során. Nincs-e valahol (mechanikai) energiavesztés?

b) A kalapács cölöphöz érkezéséig a mechanikai energia megmarad. Ezután egy tökéletesen rugalmatlan ütközés zajlik. Majd a talaj ereje lelassítja a cölöp-kalapács párost.

**.26)** Az ábrán látható ingát  $90^\circ$ -kal kitérítjük és elengedjük. Az asztal szélén levő, vele egyenlő tömegű golyóval rugalmasan ütközik.

a) Határozzuk meg milyen távol ér a padlóra a lelökött golyó?  $(2\sqrt{hl})$

b) Mekkora lesz a földbe csapódási sebesség?  $(\sqrt{2g(h+l)})$



Előbb mechanikai energiamegmaradás, majd rugalmas ütközés azonos tömegek között, végül vízszintes hajítás.

**.27)** Egy 1 m hosszú fonálinga végére 1 kg tömegű, vasból készült golyót akasztunk. Az ingát a függőlegestől  $60^\circ$ -kal kitérítjük, majd lökés nélkül elengedjük. Amikor az inga az egyensúlyi helyzetén halad át, magához vonz egy közvetlenül előtte levő kis álló mágnes, melynek tömege 0,05 kg. Milyen magasra emelkedik az inga ezután? **(56,9°)**

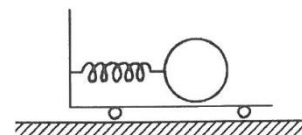
Előbb mechanikai energiamegmaradás, majd rugalmatlan ütközés azonos tömegek között, végül vízszintes hajítás.

**.28)** Az ábrán látható 0,6 kg tömegű kiskocsi a rajta lévő 0,2 kg tömegű golyóval együtt  $\frac{m}{s}$  nagyságú sebességgel egyenletesen gurul. Amikor a szétpattanó  $D = 5000 \text{ N/m}$  rugóállandójú rugó lelöki a golyót, a kocsi sebességének nagysága  $5,25 \frac{m}{s}$ -ra csökken, iránya változatlan marad.

a) Mekkora a golyó sebessége a kocsihoz viszonyítva? **(3 m/s)**

b) Mennyire volt összenyomva a rugó? **(1,64 cm)**

c) Milyen koordináta-rendszerben igaz a mechanikai energiamegmaradás? **(bármely inerciarendszerben)**



Előbb lendületmegmaradás, majd a mozgási energiák növekedése az eredetileg rugóban tárolt energiával egyenlő. Tanulságos megoldani a feladatot nem csak az asztalhoz rögzített koordináta rendszerben, hanem a hozzá képest állandó sebességgel mozgó, a tömegközépponthoz rögzített rendszerben is.

**.29)** A lejtő függőleges síkban levő  $R$  sugarú körpályán végződik. Milyen magasból kell kezdősebesség nélkül indítani a kis méretű golyót, hogy a függőleges síkban fekvő, kör alakúra hajlított abroncs belső felületén haladjon végig? **(2,5R)**



Ahhoz, hogy a pálya legfelső pontján is körmozgást végezzen (a pályán maradjon), a sebessége nem lehet akármilyen kicsi, ugyanis a rá – lefelé - ható nehézségi és a  $T$  nyomóerő összege éppen  $mv^2/R$ . Mivel a  $T$  nemnegatív, ezért  $mv^2$  legalább  $mg$ , azaz  $v^2$  legalább  $Rg$ .

Ahhoz, hogy itt fent ekkora legyen a sebesség, a mechanikai energiamegmaradás tétele alapján számolható az indítási magasság.

**.30)** A 30 cm sugarú függőleges körpályára egy lejtőről 60 cm magasságból engedünk rácsúszni egy testet. A súrlódás elhanyagolható.

a) Milyen magasan válik el a test a körpályától? **(50 cm)**

b) Mekkora a sebesség az elválás pillanatában? **(1,41 m/s)**

c) Az elválást követő mozgást is figyelembe véve, mekkora lesz a test legnagyobb magassága és legkisebb sebessége a mozgás során? **(0,556 m a kör alsó pontja felett; 0,943 m/s)**

d) \*Milyen  $h$  magasságról kellene indítani a testet kezdősebesség nélkül az  $R$  sugarú körpálya felé, hogy a mozgás során a test úgy váljon el a körpályától, hogy a mozgás során a legnagyobb magassága az indítási szintje alatt éppen  $R/3$  mélységben legyen? **(2,31R)**

- a) A golyó biztosan nem fog elválni a lejtőtől addig, amíg a legalsó ponttól a kör középpontjával azonos magasságba nem kerül.  
(Felrajzolva a rá ható nehézségi, és a sugárirányú – befelé pozitívnak választott  $-T$  tartóerőt, a mozgás dinamikai feltétele sugárirányban:  $mv^2 = T - mg\cos\alpha$ , amiből  $T = mv^2 + mg\cos\alpha$ . A jobb oldal mindkét tagja pozitív, ha a sugár és a függőlegesen lefelé mutató irány szöge,  $\alpha$  hegyesszög. Így  $T$  is pozitív.)  
A mindenkor sebessége a mechanikai energiamegmaradás tételéből adódik, így a  $T$  erő is  $\alpha$ -függő lesz:  
 $T(\alpha) = mg\cos\alpha + 2mg\left[\frac{h}{R} - (1 - \cos\alpha)\right]$ . Elválás  $T=0$  esetén következik be, azaz  $\cos\alpha = -\frac{2}{3}\left(\frac{h}{l} - 1\right)$  esetén ( $\alpha=131,8^\circ$ ). Az elváláskor a magasság  $s = R - R\cos\alpha$ .

- b) Az elválást követően egy ferde hajítás folyik, melynek kezdősebesség-vektora ismert. A függőleges sebességkomponensből az emelkedési időt, majd ebből a hajítás emelkedési magasságát kapjuk. A legkisebb sebesség pedig a megmaradó vízszintes sebességkomponens lesz.
- c) Az elejétől kezdve paraméteresen célszerű számolni. Az elváláskor  $\cos\alpha = -\frac{2}{3}\left(\frac{h}{l} - 1\right)$ . Ebből az elváláskori sebesség négyzete  $v^2 = 2/3g(h-R)$ . A hajítás során is megmaradó vízszintes sebességkomponens:  
 $v_{\text{mar}} = v \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = 2/3v(h/R - 1)$ . Emiatt a testnek marad mozgási energiája, de a többi mechanikai energia mind helyzetivé alakul a parabolapálya tetőpontjánál. Így  $mg(h-h') = 1/2mv_{\text{mar}}^2$ , ebből az elvárt magasságkülönbségekre  $h - h' = \frac{4}{27} \frac{(h-R)^3}{R^2}$  adódik. Ennek kell most  $R/3$ -nak lennie.

**.31)** Egy 0,6 m sugarú súrlódásmentes gömb tetején egy kis golyót elengedtünk.

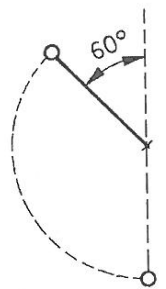
- a) A gömb tetejétől számítva milyen magasságban hagyja el a gömböt a golyó? **(0,2 m; 48,2°)**  
b) Mely helyzetben lesz a gyorsulása a nehézségi gyorsulás kétharmada? **(34,5°)**
- a) A sebesség és a szög (a testhez húzott sugár szöge) összefüggését a mechanikai energia megmaradási tétele adja. Az elválás pillanatában a körmozgás dinamikai feltétele a 0 tartóerő miatt egy másik kapcsolatot is ad a sebesség és a szög között.  
b) A szög meghatározza a sebességet, az pedig a gyorsulás centripetális komponensét. A gyorsulás érintő irányú komponensét a szög és a nehézségi erő határozza meg. A két komponens vektori eredőjét ismerjük most.

**.32)** Egy fonálinga hossza 1 m. Az ingát vízszintes helyzetből engedjük el. Az inga 45°-os helyzeténél:

- a) Mekkora a fonálon függő test sebessége? **(3,76 m/s)**  
b) Mekkora a test gyorsulása? **(15,81 m/s²)**
- a) Teljesül a mechanikai energiamegmaradás tétele.  
b) Sugárirányú és érintőirányú komponensből számítható.

**.33)** Egy pontszerű test 2 m hosszú és elhanyagolható tömegű fonálon függ. A testet ebből a helyzetéből vízszintes irányú kezdősebességgel kilendítjük.

- a) Legalább mekkora kezdősebességgel kell elindítani a testet, hogy a függőleges síkban körbe forduljon? **(10 m/s)**  
b) Mekkora alsó kezdősebesség esetén lazul meg a fonál az ábra szerinti helyzetben? **(8,37 m/s)**  
c) Mennyivel marad a test pályájának legmagasabb pontja (függőleges irányba mérve) a körpálya felső pontja alatt, ha a fonál  $\varphi = 60^\circ$  estén lazul meg? **(0,625 m)**  
d) Ha a fonál meglazulása a függőlegessel bezárt  $\varphi$  szögnél következik be, akkor mennyivel lesz alacsonyabban a parabolapálya tetőpontja körpálya legmagasabb pontjánál?  $\left[\frac{R}{2}(2 - 3\cos\varphi + \cos^3\varphi)\right]$

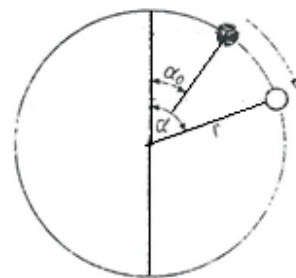


- a) Vizsgáljuk az erőket és a körmozgás dinamikai feltételét a tetőponton! Mivel a fonál a legfelső ponton felfelé mutató (tartó)erőt nem tud kifejteni, legalább akkora kezdősebesség kell, hogy a centripetális erőnek legalább  $mg$ -nek kell lennie. Ebből adódik a fenti minimális sebesség. Majd abból a lenti kezdősebesség.

- b) A megglazuláskori dinamikai feltételből adódik a sebesség. Ebből pedig az indítási sebesség.
- c) A megglazulás pillanata után ferde hajítás lesz. Keressük ennek a legnagyobb magasságát! (A megglazuláskori  $w$  sebesség és annak függőleges  $w/2$  komponense számolható. Ebből adódik az emelkedési idő. Végül a függőleges emelkedés a parabolapályán). A parabolapálya emelkedési magassága hozzájön a megglazuláskori magassághoz.
- d) Számoljunk paraméteresen!

**.34)** Az  $m$  tömegű inga merev rúdjának hossza  $r$  (a rúd tömege elhanyagolható). Az ingát  $\alpha_0$  helyzetből indítjuk.

- a) Mely helyzetben fog a rúd  $mg/2$  erőt kifejteni, ha legfelülről ( $\alpha_0 = 0^\circ$ ) indítjuk? **(33,6° és 60,0°)**
- b) Mekkora erő nyomja, illetve húzza az inga rúdját az  $\alpha$  szöghöz tartozó helyzetben, ha az ingát  $\alpha_0$  helyzetből indítjuk? [  $T = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0)$  ]



Az adott helyzetben a sebességet a mechanikai energiamegmaradás tételéből kapjuk:

$$v^2 = 2rg(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

Majd a körmozgás dinamika feltételét írjuk fel sugárirányban a ható két erőre:  $mg\cos\alpha - T = mv^2/r$ . És most  $T = +mg/2$  vagy  $-mg/2$ .

**.35)** Két  $R = 0,5$  m hosszú fonálingát közös pontban felfüggesztünk. A  $0,1$  kg tömegű ingát vízszintes helyzetig kitérítjük. Legalább mekkora kezdősebességgel kell elindítani, hogy a másik  $0,2$  kg tömegű ingával teljesen rugalmatlanul ütközve, mindketten a teljes  $R$  sugarú, függőleges síkú kört írják le? **(14,66 m/s)**

Több egymást követő lépésben követhetjük a mozgást (esetleg érdemes hátulról előre felé haladni):

- A  $v_0$  kezdősebesség és a lenti, ütközés előtti  $v_1$  sebesség összefüggését a mechanikai en. megmaradás adja meg.
- A  $v_1$  sebesség a lendületmegmaradással határozza meg az ütközés utáni közös  $v_k$  sebességet.
- A  $v_k$  sebességből fent  $v_3$  sebesség lesz a mechanikai energiamegmaradás miatt.
- A fenti  $v_3$  sebességre egy minimum értéket kapunk a körmozgás dinamikai feltételéből amiatt, hogy a fonál nem tud tartani, csak húzni.

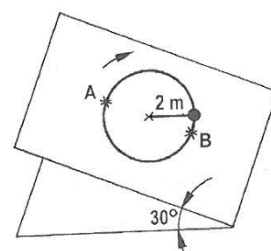
**.36)** Két, egyenként  $0,05$  kg tömegű kis golyót  $60$  cm hosszú fonál köt össze. Az azonos magasságban egymástól  $60$  cm-re levő golyókat egyszerre elengedjük.  $50$  cm esés után a fonál közepe egy szögön fennakad, majd a két golyó összeütközik.

- a) Mekkora a golyók legnagyobb sebessége? **(4,00 m/s)**
- b) Mekkora a szögre ható legnagyobb erő? **(6,33N)**

- a) A mechanikai energia megmarad, mert a kötélerők a golyók sebességére merőleges erőt fejtenek ki, munkát nem végeznek. A legnagyobb sebesség így legalul van.
- b) A kötelek, a lefelé haladó, egyre nagyobb sebességű golyók számára a nehézségi erő egyre növekvő komponensével együtt biztosítják az egyre nagyobb centripetális erőt. Így a szögön ható kötélerők folyamatosan nőnek, bezárt szögük pedig egyre csökken. Így eredőjük, a legalsó helyzetben a legnagyobb.

**.37)** Egy  $30^\circ$ -os hajlásszögű lejtő síkjában egy  $5$  kg tömegű, pontszerűnek tekinthető test körpályán mozog. A testet a körpályán a középpontban rögzített  $2$  m hosszú zsineg tartja. A körpálya legfelső A pontján a zsineget  $200$  N erő feszíti.

- a) Mekkora a test sebessége az A pontban? **(9,49 m/s)**
- b) Az AB íven a pálya legalsó B pontjáig haladva a súrlódási munka nagysága  $95$  J. Mekkora erő feszíti a zsineget a B pontban? **(255N)**
- c) Mekkora a súrlódási együttható? **(0,349)**



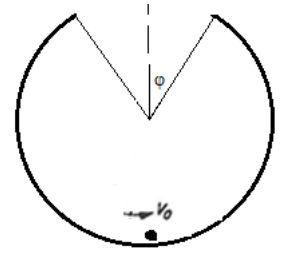
- a) A testre ható erőket 3 komponensre bontjuk: a lejtőre merőlegesen  $mg\cos\alpha$  és a vele egyensúlyt tartó  $T$  tartóerő. Így a lejtő síkjában, érintő irányba mutató súrlódási erő is számolható. Sugárirányban  $mg\sin\alpha$  és a kötélerő együtt adják a centripetális erőt.
- b) A munkatétel adja meg a B pontbeli sebességet (Figyeljünk a súrlódási munka előjelére!).



- c) A súrlódási erő nagysága állandó, mert  $T$  és így  $mg\cos\alpha$  is az.

.38)

- a) Az  $R = 8\text{ m}$  sugarú, függőleges, súrlódásmentes körpálya legmélyebb pontjáról legalább mekkora sebességgel indítsunk egy kis tárgyat, hogy ez a kör belsejében körülfusson? ( $v_0 = 20\text{ m/s}$ )
- b) A körpálya tetejét eltávolítjuk, hogy egy függőleges tengelyre szimmetrikus csonka körpálya maradjon. Szeretnénk, hogy az *előbbi sebességgel* legalulról indított test a csonka pályán végighaladjon, majd a levegőben repülve a csonka körpálya másik végéhez érkezve, azon folytassa mozgását. A körpálya ívének mekkora részét kell eltávolítanunk? (**harmadát**)
- c) Adjuk meg paraméteresen, hogy mekkora az elvehető körív felének középponti szöge, ha az indítás sebessége  $v_0$ ? ( $\cos\varphi = 0,25(\lambda - 2 \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda - 4})$ , ahol  $\lambda = \frac{v_0^2}{Rg}$ )
- d) Lehet-e, hogy alkalmas kezdősebesség esetén a teljes körív negyede hiányozzon? (**igen**)
- e) Minden félkörívnél nagyobb csonka körpálya esetén is megvalósítható-e alkalmas kezdősebesség mellett a kívánt mozgás? (**igen**)
- f)  $v_0 \geq 19,80\text{ m/s}$ -os kezdősebesség esetén mekkora rész hiányozhat a pályából? (**Két pálya is lehetséges!**  $\varphi = 27,65^\circ$  és  $\varphi = 55,63^\circ$ )
- g) Bármely kezdősebesség esetén is létezik-e alkalmas szögű körpálya a kívánt mozgáshoz? (**Nem, ennek  $v_0 \geq 19,65\text{ m/s}$  a pontos feltétele.**)
- h) Mutassuk be az alsó  $v_0$  kezdősebesség által meghatározott  $\lambda = \frac{v_0^2}{Rg}$  szám és az ehhez tartozó, a hiányos körpálya alakját meghatározó  $\cos\varphi$  érték kapcsolatát: **Vázzuk** a koordináta-rendszerben a lehetséges  $\cos\varphi$  értékek függvényében a  $\lambda$  értékét. Majd ennek alapján válaszoljuk meg, hogy egy lehetséges pályaalak hányféle kezdősebességgel valósítható meg, illetve a kezdősebességet tetszőlegesen választva, hány lehetséges pálya valósulhat meg.



- a) A szokott módon, a mechanikai energia megmarad, felül pedig a körmozgás dinamikai feltétele teljesül.
- b) A lent  $v_0$  kezdősebességgel indított test a csonka pályáról való lerepüléskor már csak  $v$  sebességgel rendelkezik. (A mechanikai energia megmaradása miatt  $v^2 = v_0^2 - 2Rg(1 + \cos\varphi)$ , ahol  $\varphi$  jelöli a hiányzó pályarész félnyílásszögét.)

Ezután  $v$  sebességű,  $\varphi$  szögű ferde hajítás jön létre, a parabolapálya tetőpontja az *elvárt szimmetrikus mozgás miatt* a csonka körpálya szimmetriatengelyén van.

Így az emelkedési időn alatt  $(v\sin\varphi/g)$  a test  $v\cos\varphi$  sebességgel vízszintesen  $R\sin\varphi$  utat kell, hogy megtegyen. Ebből  $0 = \sin\varphi \left( \frac{v^2}{g} \cos\varphi - R \right)$  adódik. Eltekintve a nem csonkított körpályához tartozó, triviális  $\varphi = 0$  megoldástól.  $v^2 \cos\varphi = Rg$  lesz a szimmetrikus mozgás feltétele.

[Most a csonka körpályán teljesen végig haladni a test, mert a nem csonkított és végighaladt.]

Összegezve: az alsó sebesség és a szimmetrikus pálya alakját meghatározó  $\varphi$  szö kapcsolata:  $[v_0^2 - 2Rg(1 + \cos\varphi)]\cos\varphi = Rg$ . Ebből  $v_0 = 20\text{ m/s}$  esetén adódó másodfokú egyenlet megoldásai  $\cos\varphi$ -re 1 és  $\frac{1}{2}$ , azaz  $\varphi = 0^\circ$  és  $\varphi = 60^\circ$ .

- c) Az általános megoldása (tetszőleges  $v_0$  esetén) is a fenti egyenletből adódik.

Használva a  $\lambda = \frac{v_0^2}{Rg}$  jelölést, az egyenlet  $2\cos^2\varphi + (2 - \lambda)\cos\varphi + 1 = 0$ . (\*)

Megoldhatóságához  $\lambda \geq 2 + \sqrt{2} = 2,828$  szükséges.

A megoldás:  $\cos\varphi = 0,25(\lambda - 2 \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda - 4})$

Nem szabad azonban megfeledkezni arról, hogy a csonka körpálya felső részén is teljesen végig is kell haladnia, azaz még a felső peremnél sem lehet a nyomóerő negatív. Ehhez  $\frac{v^2}{g} \geq R\cos\varphi$  szükséges, azaz

$\frac{v_0^2 - 2Rg(1 + \cos\varphi)}{g} \geq R\cos\varphi$ . Ebből a  $v_0^2 \geq Rg(2 + 3\cos\varphi)$ , azaz  $\lambda \geq 2 + 3\cos\varphi$  is szükséges. (\*\*)

d) Lehet-e  $\varphi = 45^\circ$ ? Ekkor  $v_0 = 19,65 \text{ m/s}$  lesz

e) Igen, ugyanis  $[v_0^2 - 2Rg(1 + \cos\varphi)]\cos\varphi = Rg$  feltétel átrendezésével  $v_0^2$ -re pozitív szám adódik bármely  $\varphi \in (0^\circ; 90^\circ)$  esetén.

f)  $\lambda = 4,9005$

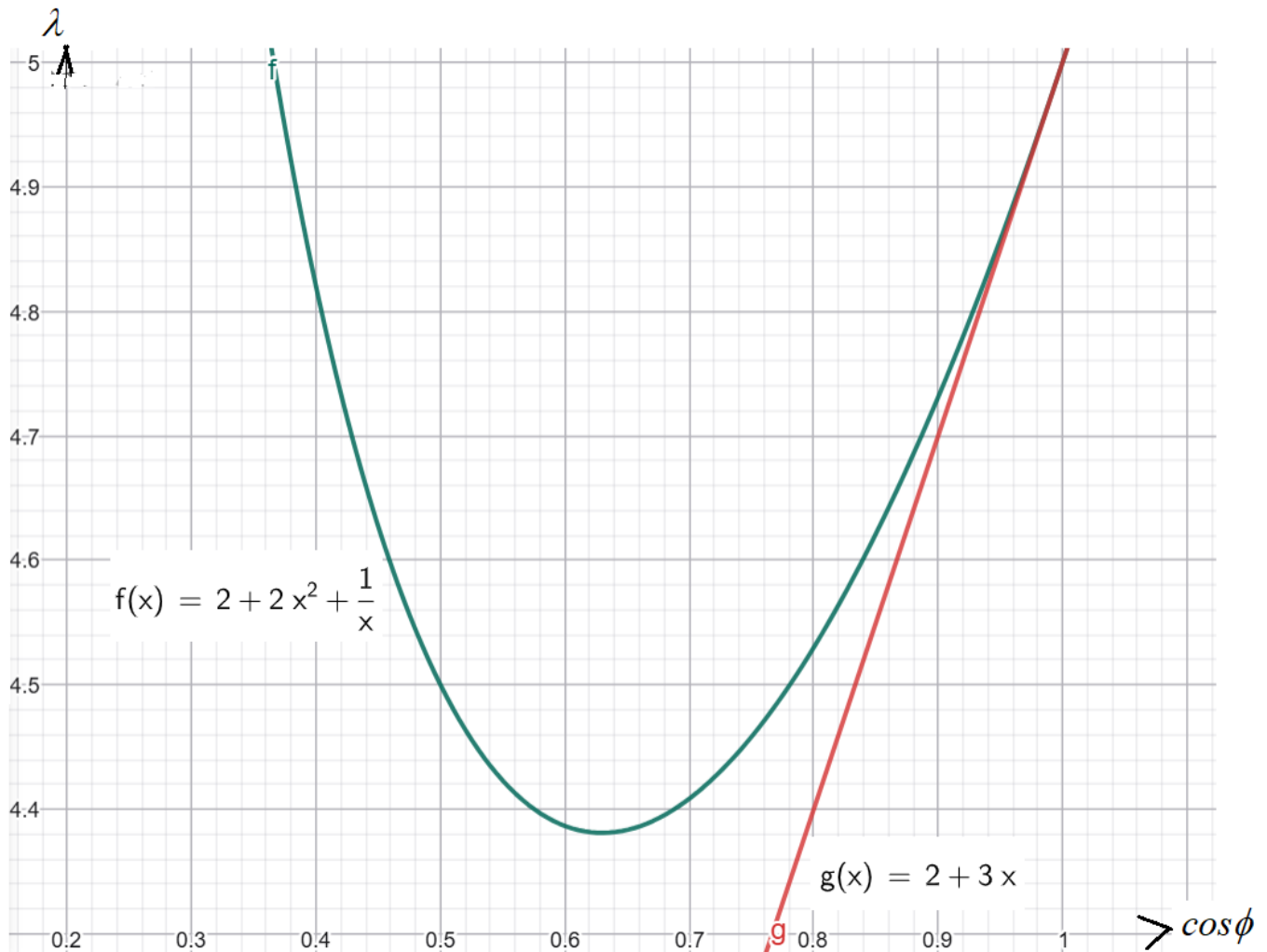
g) A kérdés az, hogy a  $\cos\varphi = 0,25(\lambda - 2 \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda - 4})$  képlet minden  $v_0$ , azaz minden  $\lambda$  esetén ad-e 0 és 1 közötti megoldást  $\cos\varphi$ -re.

A test a középpont magassága fölé pontosan  $\lambda > 2$  esetén jut.

A gyökjel alatt pontosan  $\lambda \geq 2 + \sqrt{8}$  esetén nem áll negatív szám (ekkor az előző feltétel is automatikusan teljesül). Könnyen belátható, hogy keletkező két (esetleg egybeeső) gyök mindegyike pozitív, szorzatuk pedig  $\frac{1}{2}$ . Az egyik szigoran monoton növvő, a másik szig. mon csökkenő függvénye 1-nak. A lehetséges legkisebb  $\lambda = 2 + \sqrt{8}$ -ra egybeesnek,  $\lambda = 5$  esetén pedig a csökkenő gyök éppen 0 lenne.

Tehát  $\lambda = 2 + \sqrt{8}$  (azaz  $v_0 = 19,65 \text{ m/s}$ ) -ra csak egy db körpálya lehetséges ( $\varphi = 45^\circ$ ), majd növelve  $\lambda$  értékét  $\lambda=5$ -ig, s vele  $v_0$  értékét  $v_0 = 20 \text{ m/s}$ -ig, minden sebességhez két körpálya is lehetséges. majd  $v_0 = 20 \text{ m/s}$  felett csak egyetlen körpálya lehetséges minden sebességhez.

h) A (\*) és (\*\*) egyenleteknek megfelelő grafikonok:

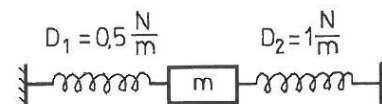


A végigfutási kényszernek (\*\*) az felel meg, hogy az egyenes „fölött” helyezkedjen el a másik grafikon.

Látható, hogy adott pályaalakhoz mindig pontosan egy kezdősebesség tartozik.

- Túl kicsi sebesség esetén nincs alkalmas pálya. A lehetséges minimális kezdősebességhez  $\lambda = 2 + \sqrt{2} = 2,828$  érték tartozik, amihez csak egyetlen,  $\varphi = 45^\circ$ -os csonka pálya tartozik.
- Növelve a kezdősebességet,  $2,828 < \lambda \leq 5$  esetén két lehetséges pálya is van,
- míg ennél is nagyobb  $5 < \lambda$  kezdősebességű értékekre megint csak egyféle pálya, mely egyre közelebb kerül a félgömb alakhoz ( $\varphi$  tart a  $90^\circ$ -hoz)

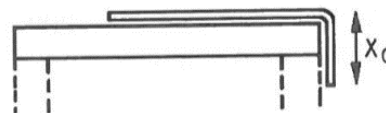
**.39)** Egy vízszintes asztalon lévő  $0,05 \text{ kg}$  tömegű test két, kezdetben nyújtatlan rugóhoz kapcsolódik az ábra szerint, melyek rugóállandója  $0,5 \text{ N/m}$  és  $1 \text{ N/m}$ . A testet  $5,1 \text{ cm}$ -rel balra húzzuk, majd elengedjük.



- Mennyi a test sebessége a  $2 \text{ cm}$ -rel balra az egyensúlyi helyzettől? ( **$0,250 \text{ m/s}$** )
- Hány százalékkal lenne kisebb a test sebessége ugyanitt, ha a csúszási súrlódási együttható  $0,006$  lenne? ( **$-2,7\%$** )
- Hányszor halad át a test az egyensúlyi helyzetén, és végül hol áll meg  $0,006$ -os tapadási és csúszási súrlódási együttható esetén? ( **$12$ -ször;  $3 \text{ mm}$ -re balra az egyensúlyi helyzettől**)

- A mechanikai energia megmarad.
- Munkatétel. (A mechanikai energiát csökkenti a súrlódás negatív munkavégzése.)
- Két egymást követő szélső állapot között a munkatételt felírva, adódik, hogy a szélső helyzetek egyensúlyi helyzettől mért távolságai minden lépésben ugyanannyival csökkennek:  $2\mu mg/(D_1+D_2) = 4 \text{ mm}$  -rel. Minden szélső helyzetből a megindulás akkor lehetséges, ha a tapadási súrlódási erőnél nagyobb a rugóerő, azaz  $x > 2\mu mg/(D_1+D_2) = 2 \text{ mm}$ .  
[A feladatbeli két rugó együttese helyettesíthető lenne egyetlen  $D_1+D_2$  rugóállandójú rugóval is!]

**.40)** Az  $l = 1 \text{ m}$  hosszú, egyenletes tömegeloszlású kötelet a vázlat szerint az asztalra helyezük, olyan  $x_0$  hosszúságú lelógó résszel, hogy a kötel éppen a lecsúszás határhelyzetében legyen. Az asztal és a kötel között a tapadási és súrlódási együttható  $0,2$ . A kötel teljesen hajlékony. Az asztal éle síkos, ott nem ébred súrlódási erő.



- Mekkora az  $x_0$  kötelhossz? ( **$0,167 \text{ m}$** )
- Ha a kötel az előző helyzetből lecsúszik, mekkora lesz a sebessége az asztal elhagyásának pillanatában? Tételezzük fel, hogy ekkor a kötel teljes hosszában függőleges helyzetű és sebességgű. ( **$2,89 \text{ m/s}$** )
- Ha a kötel sebessége egy másik asztalon  $3,00 \text{ m/s}$  lett, akkor mennyi volt ott a súrlódási együttható? ( **$1/9$** )
- Milyen határok között változhat a kötel sebessége az asztal elhagyásakor? ( **$0 \text{ m/s}$  és  $3,16 \text{ m/s}$** )

- A maximális tapadási súrlódási erő tart egyensúlyt a lelógó részre ható nehézségi erővel.  $x_0 = \frac{\mu}{1+\mu} l = \frac{1}{6}$ .
- Alkalmazzunk munkatételt! A nehézségi erő munkája a két kötelrészre külön-külön könnyen számolható: Az  $\alpha l$  hosszú függőleges darab  $(1-\alpha)l$  -nyit mozdul lejjebb, míg az asztalon lévő  $(1-\alpha)l$  hosszú rész tömegközéppontja  $(1-\alpha)/2 * l$ -lel kerül lejjebb. A csúszási súrlódási erő nagysága az asztalon lévő pillanatnyi hosszal arányos, ezért negatív munkáját a minimális és maximális érték átlagával számolhatjuk.  $v^2 = 5/6 * lg$ .
- Paraméteresen kell végigszámolni az előző kérdést! A kezdetben lelógó részarány  $\frac{\mu}{1+\mu}$ .  
A munkatételből  $v^2 = \frac{gl}{1+\mu}$  adódik.
- Mivel  $\mu$  bármilyen pozitív szám lehet, ezért  $v^2$  értéke  $gl$  és  $0$  között bármekkora lehet. érdemes végig gondolni a két szélsőséges esetben a mozgás lefolyását!

**.41)** Vízrel töltött, rögzített  $20 \text{ cm}^3$  térfogatú fecskendő belső keresztmetszete  $4 \text{ cm}^2$ . A fecskendőt függőlegesen felfelé irányítva és  $100 \text{ g}$  tömegű dugattyúját állandó sebességgel tolva, kinyomjuk belőle a vizet. A víz  $1 \text{ mm}^2$  keresztmetszetű nyíláson át  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  sebességgel tör a magasba. A súrlódási energiaveszteségtől tekintsük el!

- Mekkora sebességgel toljuk a dugattyút! ( **$5 \text{ mm/s}$** )
- Összesen mennyi munkát végeztünk? ( **$95 \text{ mJ}$** )
- Határozzuk meg a dugattyúra kifejtett erőt az idő függvényében és ábrázoljuk! ( **$2 \text{ N} - 0,02 \frac{\text{N}}{\text{s}} t$** )

- Az emelkedő alsó dugattyú  $\Delta t$  idő alatt a fecskendő aljánál egy  $A_1$  alapterületű,  $v_1 \Delta t$  magasságú hengerből távolítja el a vizet, melynek térfogata egy  $A_1 v_1 \Delta t$ . A fecskendő tetején, hasonlóan távozik  $A_2 v_2 \Delta t$  térfogatnyi víz. A víz összenyomhatatlan, ezért ezek egyenlők. ( $Av =$  állandó: kontinuitási egyenlet)

b) A teljes folyamat alatt a munkatétel szerint a végzett munkánk 3 dologra fordítódik:

- .i) A dugattyú helyzeti energiája nő (cm elmozdulás során): 50 mJ;
- .ii) a víztömeg helyzeti energiája nő (tömegközéppontja 2,5 cm-rel): 5 mJ;
- .iii) A víztömeg mozgási energiát nyer: 40 mJ.

c) A vízoszlop kezdeti hossza 5 cm, mely 10 s alatt 0-ra csökken, így hossza  $h(t) = 0,05m \left(1 - \frac{t}{10s}\right)$ .

A  $t$  időpillanattal kezdődő kicsi  $\Delta t$  időtartam alatt az előzőekhez hasonlóan 3 energiaváltozás zajlik, melyet a tolóerő munkája biztosít:

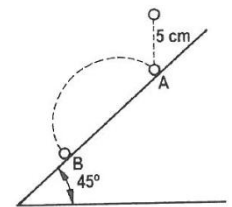
- .i) A dugattyú helyzeti energiája nő:  $Mgv_1\Delta t$ ;
- .ii) a víztömeg felfelé mozdul el úgy, hogy a dugattyú által  $\Delta t$  alatt alulról kisöpört víz „eltűnik”, miközben fent,  $h(t)$ -vel magasabban „megjelenik” a vele egyenlő térfogatú és tömegű vízmennyiség. Ezzel a vízoszlop helyzeti energiája nő:  $(A_1v_1\Delta t\rho)gh(t)$ ;
- .iii) A fent említett, fent vízmennyiség mozgási energiához jut:  $\frac{1}{2}(A_1v_1\Delta t\rho)v_2^2$ .

Ezek összege a tolóerő által  $v_1\Delta t$  úton végzett  $\Delta W = F(v_1\Delta t)$  munka, miközben az erő állandónak tekinthető, hiszen  $\Delta t$  kicsi.

Ebből  $F = Mg + A_1\rho gh(t) + \frac{1}{2}A_1\rho v_2^2 = 2N - 0,02\frac{N}{s}t$ . (Az erő három dolgot okoz: tartja a dugattyút, tartja az aktuális vízoszlopot, és gyorsítja az a kispriccelő vizet.)

**.42)** Egy  $\alpha=45^\circ$ -os lejtő A pontja felett  $h_o = 5$  cm magasból leejtünk egy kis golyót. A golyó A-ban, majd B-ben teljesen rugalmasan ütközik.

- a) Mekkora sebességgel érkezik a golyó A-ba? **(1 m/s)**
- b) Mekkora sebességgel érkezik a golyó B-be? **(2,24 m/s)**
- c) Mekkora az  $\overline{AB}$  távolság? **(0,283 m)**
- d) Változtassuk a kezdeti  $h_o$  magasságot és a lejtő  $\alpha$  hajlásszögét. Legfeljebb mekkora B-pontbeli sebesség érhető el ezáltal? **( $v_B \in [v_A; 3v_A]$ )**
- e) Állítsunk egy  $h_o$  magasságú függőleges pálcát az  $\alpha$  hajlásszögű lejtőre, és nézzük meg, mekkora a lejtőre ejtett merőleges vetülete. Éppen az  $\overline{AB}$  távolság 8-szorosa lesz. Vajon miért?
- f) Mutassuk meg, hogy a szomszédos lepattanási helyek közötti távolságok tetszőleges  $h_o$  és  $\alpha$  lejtőszög esetén is úgy aránylanak egymáshoz, mint a természetes számok 1-től kezdődően: 1:2:3:5:....

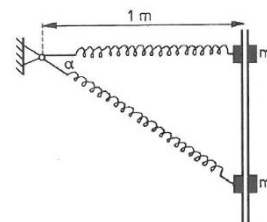


- a)  $v_A = \sqrt{2gh}$  a mechanikai energia megmaradása szerint.
- b) Az ütközés kezeléséhez, a *sebességet lejtővel párhuzamos és arra merőleges komponensekre bontjuk*. (A rugalmas ütközéskor a merőleges sebességkomponens csak előjelet vált, a vízszintes komponens nem változik. Ezután ferde hajítás lejtő felett! De van egy jobb ötlet is:

*A nehézségi gyorsulást is két komponensre bontjuk: A lejtőre merőlegesen  $g\cos\alpha$  gyorsulás okozza a lejtőre merőleges „pattogást”, míg a lejtő menti  $g\sin\alpha$  gyorsuláskomponens a már meglévő lejtő menti  $v_{ox}=v_A\sin\alpha$  kezdősebességet növeli két szomszédos pattanás között. Végül  $v_B = v_A\sqrt{5}$ .*

- c) A lejtő menti gyorsuló mozgás kezdősebessége és gyorsulása adott.  $\overline{AB} = 4\sqrt{2}h_o$
- d) A fenti gondolatmenet szerint paraméteresen számolunk. az A-beli, ütközés utáni, lejtőre merőleges sebességkomponens megegyezik a B-beli ilyen irányú sebességkomponenssel, míg a lejtő menti sebesség a gyorsulás miatt háromszorosára nő. Végül  $v_B = v_A\sqrt{(1 + 8\sin^2\alpha)} = \sqrt{2gh(1 + 8\sin^2\alpha)}$ . Azonban az ezt levezető gondolatmenet nem érvényes  $\alpha = 90^\circ$  esetén, ezért a  $3v_A$  sebesség már nem érhető el. Érdemes meggondolni, hogy a levezetés miért nem érvényes ebben a triviális esetben!
- e) Paraméteresen:  $\overline{AB} = 8h_o\sin\alpha$  és a pálca merőleges vetülete a lejtőn  $h_o\sin\alpha$ .
- f) A lepattanások között mindig azonos  $\frac{2v_o}{g}$  idő telik el, mialatt az egyes pattanások között a lejtőmenti sebesség mindig ugyanannyival,  $2v_o\sin\alpha = 2v_{ox}$ -al nő, a legelső pattanásnál pedig  $v_{ox}$  volt. A szomszédos pattanási helyeknél  $v_{ox}, 3v_{ox}, 5v_{ox}, \dots$ . Így a szakaszokon az átlagsebességek aránya éppen 2:4:6:....

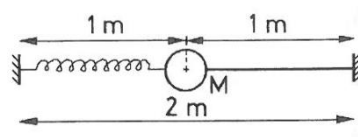
**.43)** Az 50 kg tömegű test súrlódásmentesen mozoghat egy függőleges rúdon. A testet egy terheletlen állapotban 60 cm hosszú rugó köti az ábra szerinti csuklóhoz. A rugó vízszintes helyzetben 1 m hosszú.



- Mekkora a rugóállandó, ha az egyensúlyi helyzetben  $\alpha = 30^\circ$ ? **(1803 N/m)**
- A testet felcsúsztatjuk a rúdon a rugó vízszintes helyzetéig, majd elengedjük. Mekkora sebességgel halad át a test a  $30^\circ$ -os helyzetben? **(2,49 m/s)**

- A rugóerő függőleges komponense tart egyensúlyt a nehézségi erővel.
- A mechanikai energia megmarad (helyzeti, rugalmas, mozgási)..

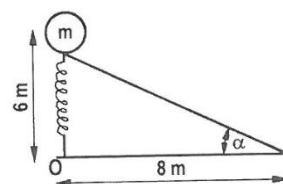
**.44)** Egy  $M$  tömegű testhez 1 m hosszú fonalat és nyugalmi helyzetben 1 m hosszú rugót kapcsolunk. A rugó és a fonál szabad végeit azonos szinten, egymástól 2 m távolságban rögzítjük, majd a testet a rugó nyújtatlan helyzetében elengedjük. A test legnagyobb süllyedési mélysége 0,5 m. A rugóállandó 175 N/m. .



- Mekkora gyorsulással kezdi mozgását az elengedett test? **(g)**
- Mekkora a test tömege? **(1,00 kg)**
- Mekkora a test gyorsulása a legmélyebb pontban? **(25,1 m/s<sup>2</sup>)**

- Kezdetben csak a nehézségi erő hat.
- A helyzeti energia csökkenése rugalmas energiává alakul. A geometriából előbb a rugó megnyúlását kell kiszámolni (0,239 m).
- A test kényszerpályán mozog: csak a fonálra merőlegesen képes elmozdulni. A nehézségi- és a rugóerőnek az ilyen irányú komponenseit kell összegezni, ez okozza a gyorsulást. A rugóerő és a kötélerő függőlegessel bezárt szögei, majd ezekből az említett iránnyal bezárt szögeit a geometriából számíthatjuk.

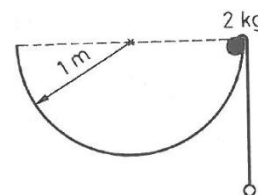
**.45)** A lejtőn levő 2 kg tömegű testet egy rugó köti össze az O ponttal. A rugó hossza terheletlen állapotban 4 m és 14 N erővel nyújtható meg 1 m-rel. A súrlódástól eltekinthetünk. A testet elengedjük a felső helyzetből.



- Mekkora gyorsulással indul el? **(14,4 m/s<sup>2</sup>)**
- Mennyi a test sebessége a lejtő közepén? **(9,00 m/s)**

- A lejtővel párhuzamos erőkomponensek okozzák a gyorsulást.
- Mechanikai energiamegmaradás. A rugóhossz a Thalesz-tétel megfordításából számolható.

**.46)** Az  $R=2$  m átmérőjű félgömb alakú csésze szélén fonalat vetünk át. A fonál kívül hosszán lelógó végéhez  $m=1$  kg tömegű, a belső oldalra átlógó végéhez  $M=2$  kg tömegű testet erősítünk. Súrlódás nincs.



- Az  $M$  tömegű testet a csésze széléről engedjük el. Melyik az a leg távolabbi helyzet, ameddig eljut a csészében, ha feltételezzük, hogy a fonál addig nem lazul meg? **(A félgömb kétharmadáig)**
- Milyen helyzetben van egyensúlyban a rendszer? [Használjuk a  $\cos 2\varphi = 2\cos^2 \varphi - 1$ ) azonosságot.] **(65,1° a csészében lévő fonál középponti szöge)**
- Jelölje  $\varphi$  a csészében lévő fonálhossz középponti szögének felét. Adjuk meg a  $\varphi = 30^\circ$ -os esethez tartozó helyzetben a testek sebességeit. **(V=2,307 m/s; v=1,998 m/s)**
- Határozzuk meg paraméteresen a  $\varphi$  szöghöz tartozó, a csészében lévő  $x$  fonálhossz, illetve az  $M$  és  $m$  tömegű testek  $V$  és  $v$  sebességeit. **( $x = 2R\sin\varphi$ ,  $V^2 = \frac{4Rg\sin\varphi(M\cos\varphi - m)}{m\cos^2\varphi + M}$ ,  $v^2 = \frac{4Rg\sin\varphi(M\cos\varphi - m)}{m\cos^2\varphi + M} \cos^2\varphi$ )**
- \*Vizsgáljuk meg Excel táblázatot használva, hogy jogos volt-e feltételezni, hogy a fonál nem lazul meg az  $M$  tömegű legszélső helyzetéig, illetve mennyi ideig tarthat eljutni a legszélső helyzetig. **(1,463 s)**

.a) A kötélerők a meg nem lazuló fonál végeinél ugyan munkát végeznek, de egyenlőek, és „ellentétes” irányuk miatt összmunkájuk 0.



A többi erő is konzervatív így a mechanikai energia megmarad. [A két szélső helyzetben nincs mozgási energia, így a helyzeti energiák egyenlők: Ezért ha a kis test  $x$  távolsággal emelkedik, akkor a nagy test  $m/M \cdot x = x/2$  mélységbe süllyed, miközben a csészében a fonal hossza  $x$ . Nevezetes derékszögű háromszög: a befogó fele az átfogónak.]

b) A csészében lévő fonál középponti szögének felét használva a rendszer állapotának megadására, az ábra szerint  $T$ ,  $K$ ,  $Mg$  erők hatnak. A szögeket a geometria szolgáltatja.

A csésze helyi érintőjének irányába mutató komponenseknek kell egyensúlyt tartania. Eközben a kis test is egyensúlyban van.  $2\cos 2\varphi = \cos \varphi$  egyenlet adódik.  $\varphi = 32,53^\circ$ .

- c) - d) Az energiamegmaradást felírva, abban  $v$  és  $V$  között kapcsolatot teremt a  $\varphi$  szög. Ám közöttük van egy kényszerfeltétel is, ami azt fejezi ki, hogy a fonál hossza nem változik: a kinti és benti test elmozdulása fonálirányban minden pillanatban azonos, így a fonálirányú sebességük is:  $V \cos \varphi = v$ , mert a fonál az érintővel  $\varphi$  szöget zár be a geometria szerint.
- Sőt megegyezik a fonálirányú gyorsulásuk is. Felírva a benti test ebből számolható a kötél erő.

- e) A  $\varphi$  szöget  $0^\circ$  és  $90^\circ$  között nagyon kicsi lépésekben változtatva, Excel táblázattal minden szögértékhez számoltassuk ki a csészében lévő  $x$  fonálhosszat, illetve a testek  $v$  és  $V$  sebességeit, a benti test  $A_{cp}$  centripetális gyorsulását, továbbá a két test által megtett utat. Kiszámíthatóak a benti test koordinátái, pl. a középpontba helyezett X-Y koordináta-rendszerben.

Ezután a szomszédos, közeli szögérték között a mozgást egyenletesen gyorsuló mozgással közelítve, számoljuk ki a közben eltelt időt. (Ha nem túl nagy  $\varphi$  –lépésekben haladunk, mindkét sebességből számított idő szinte teljesen azonos lesz). Ismerve az időket, a benti test érintő irányú  $A_e$  és a kinti test  $a$  gyorsulása is számítható.

A két testre a dinamika alaptörvényeit felírva (bent sugár és érintőirány, kint függőleges irány) a kötél- és a tartóerőkre ez adódik:  $Mg\cos 2\varphi - K\cos\varphi = MA_e$  illetve  $T - Mgsin 2\varphi = MA_{cp}$ . Ezekből  $K$  és  $T$  is számolható Excellel minden felvett szögértékhez.

| $\phi$ | x     | $2\phi=\alpha$ | $\alpha$<br>fokban | $\dot{v}$ | v     | V     | Acp   | $\Delta t$ | t<br>össz | a     | Aé    | K     | T     |
|--------|-------|----------------|--------------------|-----------|-------|-------|-------|------------|-----------|-------|-------|-------|-------|
| 0      | 0     | 0              | 0                  | 0         | 0     | 0     | 0     |            |           |       |       |       | 0     |
| 9E-04  | 0,002 | 0,002          | 0,1                | 0,002     | 0,108 | 0,108 | 0,012 | 0,032      | 0,032     | 3,333 | 3,333 | 13,33 | 0,058 |
| 0,002  | 0,003 | 0,003          | 0,2                | 0,003     | 0,153 | 0,153 | 0,023 | 0,013      | 0,046     | 3,333 | 3,333 | 13,33 | 0,116 |
| 0,003  | 0,005 | 0,005          | 0,3                | 0,005     | 0,187 | 0,187 | 0,035 | 0,01       | 0,056     | 3,333 | 3,333 | 13,33 | 0,175 |
| 0,003  | 0,007 | 0,007          | 0,4                | 0,007     | 0,216 | 0,216 | 0,047 | 0,009      | 0,065     | 3,333 | 3,333 | 13,33 | 0,233 |
| 0,004  | 0,009 | 0,009          | 0,5                | 0,009     | 0,241 | 0,241 | 0,058 | 0,008      | 0,072     | 3,333 | 3,333 | 13,33 | 0,291 |
| 0,005  | 0,01  | 0,01           | 0,6                | 0,01      | 0,264 | 0,264 | 0,07  | 0,007      | 0,079     | 3,333 | 3,333 | 13,33 | 0,349 |
| 0,006  | 0,012 | 0,012          | 0,7                | 0,012     | 0,285 | 0,285 | 0,081 | 0,006      | 0,086     | 3,333 | 3,333 | 13,33 | 0,407 |
| 0,007  | 0,014 | 0,014          | 0,8                | 0,014     | 0,305 | 0,305 | 0,093 | 0,006      | 0,092     | 3,333 | 3,333 | 13,33 | 0,465 |
| 0,008  | 0,016 | 0,016          | 0,9                | 0,016     | 0,324 | 0,324 | 0,105 | 0,006      | 0,097     | 3,332 | 3,333 | 13,33 | 0,524 |

a táblázat vége:

[illegible]

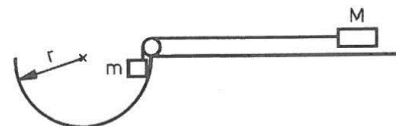
| $\phi$ | x | $2\phi=\alpha$ | $\alpha$ fokban | ív | v | V | Acp | $\Delta t$ | t össz | a | Aé | K | T |
|--------|---|----------------|-----------------|----|---|---|-----|------------|--------|---|----|---|---|
|--------|---|----------------|-----------------|----|---|---|-----|------------|--------|---|----|---|---|

A táblázatból jól látszik, hogy a szélső helyzet  $\varphi = 60^\circ$ -nál, azaz  $\alpha = 120^\circ$ -os középponti szögnél van, itt a testek sebességei gyakorlatilag 0-ra csökkennek. A kezdettől eltelt idő 1,463 s.

A fonál addig marad feszes, amíg K értéke negatívvá nem válik, illetve a benti test addig nem emelkedik fel, amíg a T tartóerő nem lesz negatív. Látható, hogy ez a szélső helyzetig végig fennáll.

Innentől a táblázat már nem lesz érvényes, hiszen az alapján készült, hogy a fonál feszes marad.

**.47)** Vízszintes lapon levő, 6 kg tömegű ládához hosszú fonalat erősítünk, és a csigán átvetett fonál végére 1,5 kg tömegű testet akasztunk. A 1,5 kg tömegű test függőleges síkú 2 m sugarú körpályán súrlódás nélkül mozog. A láda és az asztal között  $\mu=0,2$ .



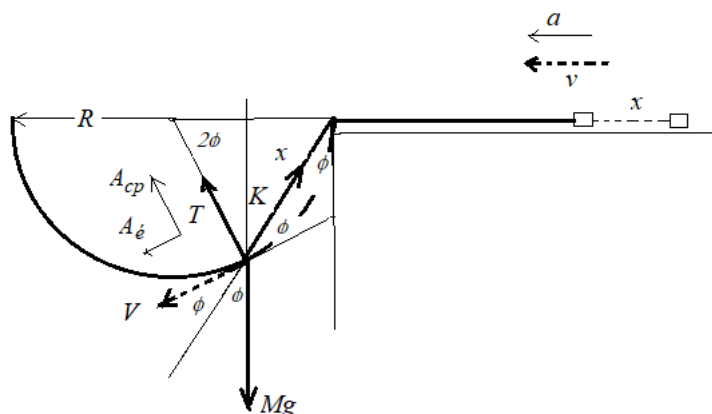
- Mekkora gyorsulással indul a láda? **(0,4 m/s<sup>2</sup>)**
- Mekkora a fonálerő az indulás pillanatában? **(14,4 N)**
- Mekkora út megtétele után áll meg a láda, ha feltételezzük, hogy a láda megállásáig a fonál végig feszes marad? **(2,40 m)**
- \*Ellenőrizzük Excel táblázatot használva, hogy nem lazul-e meg a fonál a láda megállásáig, illetve mennyi ideig tart a mozgás. **(4,476 s)**
- Mekkora a láda legnagyobb sebessége a mozgás során, és mekkora úton éri el ezt? **(0,863 m/s; 1,394 m)**

a) Kezdetben az  $m+M$  tömegű rendszert  $mg-\mu Mg$  gyorsítja.

b) A kötél-erő gyorsít, a súrlódási erő lassít, a gyorsulás ismert.

c) Munkatétel. A súrlódási erő és a nehézségi erő végeznek munkát.

d) Paraméterezzünk a csészében lévő fonál kicsi lépésekben változtatott fél-középponti szögére, mert ez a geometriát teljesen meghatározza.



A sebességek között a munkatétel ad kapcsolatot, de a foná lirányú sebességek megegyezése egy másik kényszert jelent a sebességek között. Így a sebességeket a szög függvényében kiszámoljuk, a képletet hivatkozással a táblázatba írjuk:  $V^2 = \frac{4Rg\sin\varphi(M\cos\varphi-\mu m)}{m\cos^2\varphi+M}$   $v^2 = \frac{4Rg\sin\varphi(M\cos\varphi-\mu m)}{m\cos^2\varphi+M}\cos^2\varphi$ . Az x fonálhossz és a  $A_{cp}$  is számítható.

Ezután a szomszédos, közeli szögérték között a mozgást egyenletesen gyorsuló mozgással közelítve, számoljuk ki a közben eltelt időt. A benti test érintő irányú  $A_\epsilon$  és a kinti test a gyorsulása is számítható.

A dinamika alaptörvényeit felírva (bent sugar és érintőirány, kint vízszintes irány) a kötél- és a tartóerőkre ez adódik:  $Mg\cos 2\varphi - K\cos\varphi = MA_\epsilon$  illetve  $T - Mg\sin 2\varphi = MA_{cp}$ . Ezekből K és T is számolható.

|       |              |       |      |       |               |       |       |       |              |       |       |             |       |
|-------|--------------|-------|------|-------|---------------|-------|-------|-------|--------------|-------|-------|-------------|-------|
| 0,638 | 2,382        | 1,276 | 73,1 | 2,552 | 0,1693        | 0,211 | 0,022 | 0,016 | 4,318        | -0,79 | -0,97 | 7,25        | 14,39 |
| 0,639 | 2,385        | 1,278 | 73,2 | 2,555 | 0,1556        | 0,194 | 0,019 | 0,017 | 4,335        | -0,79 | -0,98 | 7,23        | 14,39 |
| 0,64  | 2,388        | 1,279 | 73,3 | 2,559 | 0,1405        | 0,175 | 0,015 | 0,019 | 4,354        | -0,8  | -0,98 | 7,21        | 14,39 |
| 0,641 | 2,391        | 1,281 | 73,4 | 2,562 | 0,1236        | 0,154 | 0,012 | 0,021 | 4,375        | -0,8  | -0,99 | 7,2         | 14,39 |
| 0,641 | 2,393        | 1,283 | 73,5 | 2,566 | 0,1039        | 0,13  | 0,008 | 0,025 | 4,4          | -0,8  | -1    | 7,18        | 14,39 |
| 0,642 | 2,396        | 1,285 | 73,6 | 2,569 | 0,0794        | 0,099 | 0,005 | 0,031 | 4,43         | -0,8  | -1    | 7,16        | 14,4  |
| 0,643 | <b>2,399</b> | 1,286 | 73,7 | 2,573 | <b>0,0424</b> | 0,053 | 0,001 | 0,046 | <b>4,476</b> | -0,81 | -1,01 | <b>7,15</b> | 14,4  |
| 0,644 | <b>2,402</b> | 1,288 | 73,8 | 2,576 | #SZÁM!        | ##### | ##### | ##### | #####        | ##### | ##### | #####       | ##### |

| $\phi$ | x | $2\phi=\alpha$ | $\alpha$ | ív | v | V | Acp | $\Delta t$ | t össz | a | Aé | K | T |
|--------|---|----------------|----------|----|---|---|-----|------------|--------|---|----|---|---|
|--------|---|----------------|----------|----|---|---|-----|------------|--------|---|----|---|---|

e) A láda gyorsulása kezdetben pozitív, később negatív. 0-nál legnagyobb a sebesség:

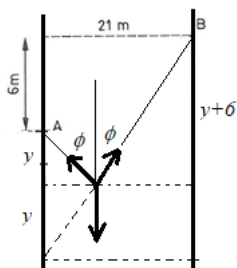
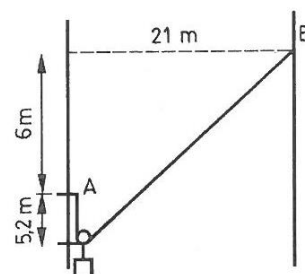
|       |       |       |      |       |        |       |       |       |       |       |       |      |       |
|-------|-------|-------|------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|
| 0,353 | 1,381 | 0,705 | 40,4 | 1,41  | 0,8631 | 0,92  | 0,423 | 0,004 | 2,727 | 0,007 | 0,085 | 12   | 10,36 |
| 0,353 | 1,384 | 0,707 | 40,5 | 1,414 | 0,8631 | 0,92  | 0,423 | 0,004 | 2,731 | 0,005 | 0,083 | 12   | 10,38 |
| 0,354 | 1,388 | 0,709 | 40,6 | 1,417 | 0,8632 | 0,92  | 0,423 | 0,004 | 2,735 | 0,003 | 0,082 | 12   | 10,4  |
| 0,355 | 1,391 | 0,71  | 40,7 | 1,421 | 0,8632 | 0,921 | 0,424 | 0,004 | 2,739 | 0,001 | 0,08  | 12   | 10,42 |
| 0,356 | 1,394 | 0,712 | 40,8 | 1,424 | 0,8632 | 0,921 | 0,424 | 0,004 | 2,743 | -0    | 0,078 | 12   | 10,44 |
| 0,357 | 1,398 | 0,714 | 40,9 | 1,428 | 0,8631 | 0,921 | 0,424 | 0,004 | 2,746 | -0    | 0,076 | 12   | 10,46 |
| 0,358 | 1,401 | 0,716 | 41   | 1,431 | 0,8631 | 0,921 | 0,425 | 0,004 | 2,75  | -0    | 0,075 | 12   | 10,48 |
| 0,359 | 1,404 | 0,717 | 41,1 | 1,435 | 0,8631 | 0,922 | 0,425 | 0,004 | 2,754 | -0,01 | 0,073 | 12   | 10,5  |
| 0,36  | 1,407 | 0,719 | 41,2 | 1,438 | 0,8631 | 0,922 | 0,425 | 0,004 | 2,758 | -0,01 | 0,071 | 11,9 | 10,52 |

| $\phi$ | x | $2\phi=\alpha$ | $\alpha$ | ív | v | V | Acp | $\Delta t$ | t | össz | a | Aé | K | T |
|--------|---|----------------|----------|----|---|---|-----|------------|---|------|---|----|---|---|
|--------|---|----------------|----------|----|---|---|-----|------------|---|------|---|----|---|---|

A láda legnagyobb sebessége 40,8°-nál a legnagyobb. A K és T értéke végig pozitív, azaz a kötélt nem lazul meg és a teset a csészében nem emelkedik fel.

**.48)** Az A és B pontok között kötélt lóg. A kötéltre súrlódásmentesen mozgó csigával terhet akasztunk. A csigát az A pont alatt 5,2 m mélyen a falhoz szorítva tartjuk, majd elengedjük.

- A kiindulási helytől milyen mélyen lesz a csiga egyensúlyi helyzetben? **(1,8 m)**
- Mennyi lesz a mozgás folyamán a csiga legnagyobb sebessége? **(6 m/s)**
- Milyen hosszú lesz a bal kötélszár, amikor az elengedett csiga éppen megfordul? **(16,7 m)**

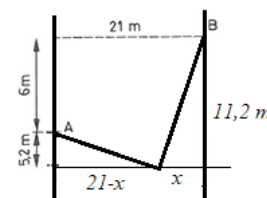


a) A fizika a problémában: Az csiga egyensúlyi helyzetében a csiga tengelyére ható forgatónyomatékok egyensúlya miatt - tekintve az egyenlő karokat - a kötélerők egyenlők a két oldalon. Emiatt a csigára ható három egymás után fűzött erő zárt vektorháromszöge egyenlőszárú. Így a kötélerők a függőlegessel azonos szöveget zárnak be.

Innentől már csupa geometria: A kötélt hossza számolható a kezdeti helyzetből: 29 m. Az egyenlő szögeket és a teljes kötélt hosszát úgy használhatjuk fel, hogy a csigán átmenő vízszintes egyenesre az egyik kötelet tengelyesen tükrözzük (az ábra szerint). Ekkor egy derékszögű háromszög keletkezik 21 m, 29 m és  $2y+6$  m oldalakkal.

b) A mechanikai energia megmarad. Az egyensúlyi helyzetben lesz a csiga legalacsonyabban, így a helyzeti energiából ekkor keletkezik a legnagyobb mozgási energia.

c) A fizika: A kiindulási szinttel azonos magasságban lesz a megfordulás helye.  
A geometria: Két Pitagorasz-tétel adja a két kötélt hosszát, melyek összege 29 m.  
A kapott gyökös egyenletet két négyzetreemeléssel könnyen megoldhatjuk, ha kezdetben az egyik gyökjelet átvisszük a túloldalra, a konstans mellé.



## Gravitációs energia

[A Föld tömege  $5,97 \cdot 10^{24}$  kg, sugara 6370 km;

A Hold tömege  $7,35 \cdot 10^{22}$  kg, sugara 1740 km, távolsága a Földtől: 384.000 km;

A Nap tömege  $1,98 \cdot 10^{31}$  kg, sugara 696.000 km, távolsága a Földtől: 150 millió km;

A Föld forgási periódusideje 24,0 óra]

**.49)** A Holdközéppontjához képest (más égitestek gravitációs vonzását figyelembe nem véve)...

- a) ...mekkora sebességgel kell kilőni egy testet a Holdon, hogy az a Hold körül, a Hold felszínének közelében körpályán keringjen? (1. szökési sebesség a Holdon) **(1,68 km/s)**
- b) Legalább mekkora függőleges irányú sebességgel kell a testet fellőni a Holdon, hogy vissza ne essék? (2. szökési sebesség a Holdon) **(2,37 km/s)**
- a) Homogén, gömb alakú bolygó esetén mekkora az 1. és 2. szökési sebesség aránya? **(1:√2)**
- a) A körpályán a gravitációs vonzóerő biztosítja a centripetális erőit.
- b) A mechanikai energia megmaradása miatt a kilövéskor legalább 0 legyen az összenergia (gravitációs helyzeti + mozgási), mert nagyon távol a helyzeti energia 0, a mozgási pedig nemnegatív.
- c)  $\gamma \frac{Mm}{R^2} = m \frac{v_1^2}{R}$  illetve  $\frac{1}{2}mv_2^2 - \gamma \frac{Mm}{R} = 0$

**.50)** Hogyan függ össze egy homogén, gömb alakú, nem forgó bolygó felszínén az 1. és 2. szökési sebesség a helyi gravitációs gyorsulással? ( $v_1^2 = gR$  és  $v_2^2 = 2gR$ )

A centripetális erőt biztosító gravitációs erő most  $mg$  módon is írható:  $\gamma \frac{Mm}{R^2} = mg = m \frac{v_1^2}{R}$ , amiből  $v_1^2 = gR$ , másfelől azonban  $\gamma \frac{M}{R^2} = g$ . Ezt felhasználva a 2. szökési sebesség definíciójánál: Az  $\frac{1}{2}mv_2^2 - \gamma \frac{Mm}{R} = 0$  képletben  $\gamma \frac{M}{R^2} = g$  helyettesítést végzünk.

**.51)** Mekkora kezdősebességgel kapjon egy test ha azt szeretnénk, hogy ne essen vissza a Napba, és...

- a) ...a Nap felszínétől lőnénk ki? **(616 km/s)**
- b) ...a Föld felszínéről lőnénk ki? **(43,4 km/s)**
- a) A kilövéskor az összenergia legalább 0 legyen.
- b) Számoljunk a Nap mellett a Föld gravitációs hatásával is!

**.52)** Mekkora végsebességgel érkezik a Föld felszínére az  $R = 6370$  km magasról leejtett kődarab, és mekkora lenne a felszín közeli körpályán az űrhajó sebessége? **(7,910 km/s)**

A mechanikai energia megmarad: a mozgási energia növekedése a gravitációs energia csökkenésével egyenlő.

**.53)** A Föld körül ellipszis pályán keringő űrhajó legkisebb távolsága a Föld középpontjától 6870 km. Sebessége ekkor  $10 \frac{km}{s}$ . A Föld tömege  $5,98 \cdot 10^{24}$  kg.

- a) Mekkora az űrhajó legnagyobb távolsága a Föld középpontjától? **(4,32\*10<sup>4</sup> km)**
- b) Mekkora az űrhajó legkisebb sebessége? **(1,59 km/s)**

Két fontos törvény teremt kapcsolatot a két ismeretlen között: Az energiamegmaradás (a legközelebbi és legtávolabbi helyzetre alkalmazva) és Kepler II. törvénye, a területi sebesség állandóságának tétele: A két szélső helyzetben rövid  $\Delta t$  idő alatt a vezérsugarak által súrolt háromszögek területei egyenlők:  $(v_1 \Delta t) r_1 / 2 = (v_2 \Delta t) r_2 / 2$ , azaz  $v_1 r_1 = v_2 r_2$ . Az egyenletrendszer megoldható.

**.54)** Az 1958-ban felbocsájtott Vanguard-1 műhold pályájának földfelszínhez legközelebbi pontja 654 km, legtávolabbi pontja 3969 km-re volt eleinte. Mekkora a műhold sebessége, földközeli, földtávolban és a kettő között félúton? **(8 217 m/s; 5 582 m/s; 6773 m/s)**

Az energiamegmaradás és a Kepler II. törvénye ad egy egyenletrendszert a keresett legnagyobb és legkisebb sebességre.

A kistengely végpontjában és a főkdközeli helyzetben a területi sebesség állandósága miatt  $(v_1 \Delta t) r_1 / 2 = (v_3 \Delta t) r_3 \sin \phi / 2$ , azaz  $v_1 r_1 = v_3 r_3 \sin \phi$ , ahol  $\phi$  a  $v_3$  sebesség és az oda húzott  $r_3$  vezérsugár szöge.

Most azonban  $r_3 = a$ , és a  $\phi$  szög kiszámolható a szimmetriacentrum, a Föld és a műhold derékszögű háromszögéből:  $\sin \phi = b/a$ . Így  $v_1 r_1 = v_3 b$  adódik.

Az ellipszis adataiból  $b$  számolható:  $b^2 = a^2 - c^2$ -ből, ahol  $a = (R + h_1 + R + h_2) / 2$  és  $c = a - (R + h_1)$ .

**.55)** Pontszerű,  $M$  tömegű bolygótól  $r$  távolságra, a bolygóhoz viszonyított sebesség nélkül magára hagyunk egy  $m$  tömegű testet ( $m \ll M$ ). Mennyi idő alatt esik rá a test a bolygóra?

Ha a test egy kicsi, „oldalirányú” (a hozzá húzott vezérsugárra merőleges)  $v_0$  sebességet is kapna kezdetben, akkor a bolygó körüli ellipszispályára állna. (Kepler I.) Mivel nincs meg ez a kezdősebesség, ezért az ellipszispálya „elfajuló” lesz, azaz kistengelye 0. (Hiszen nincsen olyan sebességkomponense a mozgása során, ami a vezérsugárra merőleges lenne.) (Gondolatban egyre kisebb, 0-hoz közelítő kezdősebességet feltételezve, az ellipszis kistengelye 0-hoz tart.)

Az elfajuló ellipszishoz  $b = 0$  miatt  $a = c$  lesz (ugyanis  $a^2 = b^2 + c^2$ ), azaz az ellipszis fókuszai a nagytengely végpontjainál (tehát a test kezdeti helyén és a bolygó helyén) vannak. Emiatt az elfajuló ellipszis fél nagytengelye  $r/2$ , amilyen való „keringési” idő éppen az esési idő duplája.

Kepler III. törvényét alkalmazzuk az eső testre és a keringő műholdra.

**.56)** \*A Naphoz rögzített koordináta-rendszerből nézve, a forgó Földön a 45. szélességi fokon, a talajon álló test esetén...

- .... mekkora a gravitációs erő és a centripetális erő (eredő erő) aránya? **(412)**
- Számoljuk ki, hogy mekkora szöggel tér itt el egymástól a gravitációs erő iránya és a függőleges irány, (a test súlyának és a szabadesésnek az iránya). **(0,0930°)**
- A Föld mely szélességi körén legnagyobb a súlyerő és a gravitációs erő közötti szögeltérés? **(a 49,95°-os szélességi körön, az eltérés 0,0986°)**

a) A körpálya sugara  $\frac{R}{\sqrt{2}}$ , így  $\frac{F_{gr}}{F_{cp}} = \sqrt{2} \frac{\gamma M}{R^3 \omega^2}$ .

- b) A – Naphoz rögzített – inerciarendszerből nézve a talajon nyugvó testre a centripetális (eredő!) erőt a gravitációs erő és a talaj tartóereje biztosítja.

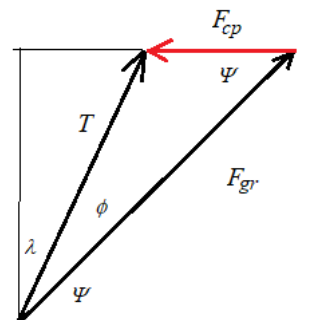
Az ábra alapján  $tg \lambda = \frac{F_{gr} \cos \Psi - F_{cp}}{F_{gr} \sin \Psi} = \dots = 1 - \sqrt{2} \frac{F_{gr}}{F_{cp}}$ . Ebből számolható a  $\phi$  szög.

- c) Paraméteresen számolva a fenti gondolatmenet szerint:  $tg \lambda = \frac{1}{tg \Psi} (1 - x)$ ,

ahol  $x = \frac{R^3 \omega^2}{\gamma M} = \frac{1}{291}$ . Ennek felhasználásával a keresett szög tangensére

$$tg \phi = tg [90^\circ - (\lambda + \Psi)] = \dots = \frac{1 - tg \lambda tg \Psi}{tg \lambda + tg \Psi} = \dots = \frac{x}{\frac{1}{tg \Psi} (1 - x) + tg \Psi}.$$

E törtnek csak a nevezője függ a  $\Psi$ -től, A nevező két tagjára a számtani és mértani közép közötti egyenlőséget alkalmazva, a nevező minimuma akkor adódik, ha a két tag egyenlő. azaz  $tg^2 \Psi = 1 - x$ .



**.57)**

- Mekkora a Föld felszíne fölött  $h$  magasságban keringő űrhajó keringési és kilövési sebessége IR-ből (Nap) nézve?  $\left( \sqrt{\frac{\gamma M}{R} \frac{R}{R+h}} \right.$  és  $\left. \sqrt{\frac{\gamma M}{R} \frac{R+2h}{R+h}} \right)$
- Hányszorosa ez az 1. szökési sebességnek? Számolj paraméteresen!  $\left( \sqrt{\frac{R}{R+h}} \right.$  és  $\left. \sqrt{\frac{R+2h}{R+h}} \right)$
- A nagy területű államokban (USA, Oroszország) hol vannak az űrrakéta indító állomások? Avagy: a Föld mely pontjáról célszerű fellőni a műholdakat, űrhajókat, hogy minél kevesebb energiába kerüljön a kívánt sebességek elérése? **(az egyenlítőhöz minél közelebből)**

a) Az egyenletrendszer két egyenletből áll. Egyik: a keringéskor a gravitációs erő adja a centripetális erőt; másik: az energiamegmaradás a kilövés és a keringés összehasonlításánál.

b) Az első szökési sebesség akkora, hogy a földfelszín-közeli keringéskor a gravitációs erő adja a szükséges centripetális erőt.

c) A Föld mely pontjainak van eleve sebessége az IR-ből (Nap) nézve?



**.58)** Mekkora a stabil körpályán keringő műhold mozgási és gravitációs helyzeti energiájának aránya? Hogyan függ ez az arány a körpálya sugarától? **(-1/2; nem függ)**

$\frac{1}{2}mv^2$  és a  $\gamma Mm/R$  arányához fel kell használni, hogy a gravitációs erő adja a centripetális erőt.

**.59)** Mutasd meg, hogy a perdület-megmaradás tétele és Kepler II. törvénye egyenértékű a bolygók mozgását tekintve.

A pálya síkjára merőleges, a vonzócentrumon átmenő tengelyre vonatkozó perdület  $N=(mv)rsin\phi$ , ahol  $\phi$  a sebesség és a testhez húzott vezérsugár szöge. Ez állandó.

Rövid  $\Delta t$  idő alatt a test  $v$  sebességgel  $v\Delta t$  rövid elmozdulást szenved, mely  $\phi$  szöget zár be a vezérsugárral. Így a vezérsugár ezalatt egy olyan háromszöget sűrol, melynek egyik oldala  $r$ , az erre merőleges magassága pedig a  $(v\Delta t)sin\phi$ . A sűrolt terület  $1/2r(v\Delta t)sin\phi$ . Ennek időegységre eső része állandó a Kepler II-törvény szerint:  $1/2rvsin\phi = \text{állandó}$ .

**.60)** Egy 50 kg tömegű mesterséges hold perihéliumban 241 km, aphéliumban 1700 km magasan van a Föld felszíne fölött.

- Mekkora a sebessége e két pontban? **(8,14 km/s; 6,67 km/s)**
  - Legalább mekkora energiabefektetéssel lehet erre a pályára állítani? Miért „legalább”? **(8,41 km/s)**
  - Mekkora a sebessége a földfelszín felett 1000 km magasan? **(7,34 km/s)**
  - Mekkora a sebesség szöge a vezérsugárhoz képest ekkor? **(84,1° avagy 95,9°)**
  - Mekkorák a simulókörok perihéliumban és aphéliumban? **(7,27 km)**
  - És a kistengely végpontjában? **(7,38 km)**
  - És általában, egy  $2a$  és  $2b$  nagy és kistengelyű ellipszispályán a tengelyvégpontokban? **( $b^2/a$  és  $a^2/b$ )**
- a) Egyenletrendszer az energia-megmaradásból és Kepler II. (perdületmegmaradás) törvényéből. A távolságok  $r_1=R+h_1=6611$  km és  $r_2=R+h_2=8070$  km.
- b) A földfelszíni kilövési sebesség (nem forgó földet tekintve) az energiamegmaradásból adódik, a kilövési és az egyik „szélső” helyzetet összehasonlítva. A Föld forgása miatt már kilövés előtt is van sebessége IR-ből nézve. Ezt kell „kipótolni” a fent számolt szükséges sebességre. Onnan célszerű indítani, ahol eleve nagy a forgás miatti kerületi sebesség.
- c) Energiamegmaradás.
- d) A perdület megmarad (avagy Kepler II). Itt most annyi, mint az egyik szélső helyzetben:  $(mv_1)r_1=(mv)rsin\phi$ , ahol most  $r=7370$  km.
- e) A simulókör az a kör, amelyen mozogva (az eredeti pálya helyett) a test ugyanazon a helyen, ugyanakkora sebességvektorral és ugyanazon gyorsulásvektorral mozogna ugyanabban a pillanatban. Így a körmozgás dinamikai feltételét tekintve, a sebességre merőleges sugárirányú gyorsuláskomponens a sebességből  $\frac{v^2}{r_g} = a_{norm}$ .
- A nagytengely egyik végpontjában:  $\frac{v_1^2}{r_g} = \frac{\gamma M}{r_1^2}$ . Ebből  $r_g=7,27$  km. Érdemes a nagytengely másik végpontjából is kiszámolni, ugyanezt kapjuk.
- A kistengely végpontjához húzott vezérsugár „ $a$ ” hosszúságú, a gravitációs gyorsulás  $\frac{\gamma M}{a^2}$ , ennek a kistengely irányú komponense  $b/a$ -való szorzással adódik. Ez lesz egyenlő  $\frac{v_3^2}{r_g}$ -vel. Az aktuális  $v_3$  sebesség az energiamegmaradásból adódik.
- f) Lusta módon az ellipszis simulóköreinek sugarai a tengelyek végpontjaiban jobb függvénytáblázatokban direktben is fellelhető:  $b^2/a$  és  $a^2/b$ . Szép kihívás ezt levezetni paraméteres számolással a fenti fizikai gondolatmenettel is. Csupán annyit kell hozzátenni, hogy a végpontbeli sebességeket már kezdettől paraméteresen számoljuk ki.

**.61)** Az Föld felszíne fölött földugárnyi távolságra kering egy műhold körpályán. Egy adott pontban sebességének nagyságát pillanatszerűen megnöveli 30%-kal. Mekkora az eredeti és az új keringési idő, és mekkora az új ellipszispálya kistengelye? **(3,967 óra; 22,88 óra; 29.691 km = 4,661R)**

A körmozgás dinamikai feltételéből adódik az eredeti periódusidő és sebesség kapcsolata.

Az energia és perdületmegmaradás (avagy Kepler II.tv.) egyenleteiből adódik az aphelium távolsága, és az ottani sebesség.

Kepler III. törvényéből az új keringési idő.

A perihélium és aphélium távolságából a nagytengely és a lineáris excentricitás adódik. Majd Pitagorasz-tételből a fél kistengely.

**.62)** [Eötvös Verseny 1969 -A Holdraszállás évében] Az  $R=3600$  km sugarú bolygó fölött  $h=400$  km magasan körpályán keringő űrhajó bekapcsolja a fékezőrakétáját rövid időre úgy, hogy olyan ellipszispályára térjen át, mely a másik oldalon éppen a felszín érintse. Mozgási energiájának hányad részét veszítette el fékezésakor? **(1/19)**

A kezdeti körpályán a sebességtől függő centripetális erőt a gravitációs vonzás biztosítja. Ebből a kezdeti sebesség adódik.

Az ellipszispályához a szokásos energia- és perdületmegmaradás egyenletrendszerét oldjuk meg, amiből a fékezés utáni sebesség adódik.

**.63)** Egy bolygó körül körpályán keringő objektum pillanatszerűen két részre robban szét. Az egyik rész, amelynek tömege a kezdeti tömeg  $1/5$ -e, sebessége  $1,5$ -szeresére nő, mozgásának iránya nem változik.

- a) Milyen pályán mozognak tovább a szétrepült darabok? **(hiperbola, ellipszis)**  
b) Legalább milyen magasan kellett keringenie az objektumnak, hogy egyik része se csapódjon a bolygó felszínébe, ha a bolygó sugara  $3400$  km? **(2082 km)**

- a) A lendületmegmaradás miatt a nagyobb rész sebessége  $7/8v_0$  az eredeti irányba. A kezdeti  $v_0$  és  $r_0$  közötti kapcsolat a körpályán:  $v_0^2 = \frac{\gamma M}{r_0}$ .

A pálya alakja a részek összenergiájának előjelétől függ: negatív, 0, pozitív előjelek esetén ellipszis, parabola, hiperbola.

- b) Az ismert  $7/8v_0$  és  $r_0$  adatokkal megoldjuk a szokásos egyenletrendszert (energia és perdület megmarad), amiből a túloldali távolságra  $r = 49/79r_0$  adódik. Ennek kell  $R$ -nél nagyobbnak lenni, hiszen a bolygó tömegét a középpontjába sűrítve gondolhatjuk.

**.64)** Adott egy nagy,  $M$  tömegű (álló) bolygótól  $r$  távolságra lévő kis műhold, melynek a kezdeti  $v$  sebessége merőleges a bolygó és a műhold egyenesére. A sebesség nagysága változtatható.

- a) Határozzuk meg az ellipszispálya adatainak ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) és a keringési időnek a sebességtől való függését.

$$\left( a = \frac{\alpha}{2\alpha-1} r; \quad c = \frac{|\alpha-1|}{2\alpha-1} r; \quad b = \frac{1}{\sqrt{2\alpha-1}} r; \quad T = \left( \frac{\alpha}{2\alpha-1} \right)^{3/2} \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}} r^{3/2}, \text{ ahol } \alpha = \frac{\gamma M}{v^2 r} \right)$$

- b) Mit adnak e képletek  $v=0$  esetén, továbbá  $v$  növekedése esetén?

**( $v=0$ : az elfajuló ellipszispályán, szabadeséssel a műhold a bolygóra esik;**

**$v$  növekedésekor  $a$ ,  $b$ ,  $T$  nő,  $c$  egy darabig csökken, aztán  $-a$  körpályát követően – ismét nő)**

- c) Hogyan határozza meg a kezdeti  $v$  sebesség azt, hogy a bolygó a műhold ellipszispályájának melyik fókuszában van? **(a kezdeti  $v$ , vagy a körpályához tartozó  $v_k$  a nagyobb-e)**

- a) Az ellipszispálya feltétele a negatív összenergia:  $\alpha = \frac{\gamma M}{v^2 r} > 1/2$ .

Megoldva a szokásos egyenletrendszert (energia és perdület/területi sebesség megmarad) az ellipszispálya nagytengelyének túlsó végpontjában a távolság és a sebesség:  $r_2 = \frac{1}{2\alpha-1} r$ ;  $v_2 = (2\alpha-1)r$ .

Az ellipszis adatai:  $a=(r+r_2)/2$ , majd  $c=|r_2-r|/2$ , majd  $b = \frac{1}{\sqrt{2\alpha-1}} r$ .

A keringési időhöz össze kell hasonlítani a körpályát az ellipszispályával Kepler III. szerint. (A körpályán a sugár  $r$ , a keringési idő pedig számolható  $r$  és  $v$  segítségével).

- b) A  $v=0$  esethez a képletekben  $\alpha \rightarrow \infty$  határátmenetet kell választani.  $a=c=r/2$ ,  $b=0$ , a pálya elfajuló.  $T =$

$\left( \frac{1}{2} \right)^{3/2} \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}} r^{3/2}$ . Érdemes összevetni ezt a 3. fejezet megfelelő feladatával, ahol a bolygóra esés idejét kellett kiszámolni. (Ezen idő felét kaptuk most.)

Növekvő  $v$  esetén  $(0\text{-től } \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}}\text{-ig, különben megszökik})$  az  $\alpha$  csökken végtelentől  $1/2$ -ig.

- c) A  $v=0$  elfajuló pálya távolabbi fókuszában van eredetileg a bolygó, a közelebbi fókuszában pedig maga a műhold. Miközben  $v$ -vel együtt a pálya nagytengelye nő,  $c$  csökkenése miatt a fókuszok egyre közelebb lesznek egymáshoz. Körpályánál esnek egybe. Innentől kezdve a további pályaméret növekedés során a bolygó a közelebbi fókuszban marad.

**.65)** Két homogén anyagú, gömb alakú égitest, melyek tömegei  $m$  és  $M$ , sugaraik  $r$  és  $R$ , álló helyzetből,  $d$  távolságból egymás felé indul az űrben a gravitációs vonzásuk hatására. (Más testek hatásától eltekintünk.) Mekkora sebességgel és mennyi idő múlva találkoznak?  $\left(v^2 = \frac{2\gamma M^2}{m+M} \left(\frac{1}{R+r} - \frac{1}{d}\right); V^2 = \frac{2\gamma m^2}{m+M} \left(\frac{1}{R+r} - \frac{1}{d}\right); T = \frac{\pi}{\sqrt{8\gamma(m+M)}} d^{\frac{3}{2}}\right)$

- A tömegközéppontjuk helyben marad, rögzítsük ehhez a koordináta rendszert. Ebben a lendületmegmaradás és a mechanikai energia megmaradása egyenletrendszerét megoldva, a sebességek adódnak.
- Legyen pl. az  $m$  tömegű testnek a tömegközépponttól mért távolsága egy tetszőleges pillanatban  $x$ . Ekkor azt  $M$  tömegű teste távolsága is számolható (TKP helyben marad), így a köztük ébredő erő:  $F(x) = \frac{\gamma m}{x^2} M \left(\frac{M}{m+M}\right)^2$ . Ez úgy tekinthető, mintha az  $m$  tömegű testet a tömegközéppontban lévő  $M' = M \left(\frac{M}{m+M}\right)^2$  tömegű test vonzaná. Mivel ez bármely  $x$  távolság esetén igaz, ezért a találkozás ideje ugyanannyi, mint amennyi az  $m$  tömegű test TKP-ba, az ott feltételezett  $M' = M \left(\frac{M}{m+M}\right)^2$  vonzó tömeghez történő bezuhanásának ideje.
- Ezt az időt egy korábbi feladatban már kiszámoltuk (3. fejezet, ...példa) annak alapján, hogy a bezuhanásig megtett pályát egy elfajuló,  $b=0$  kistengelyű ellipszispályának tekintjük, melynek a fókuszában a tömegközéppontban álló  $M'$  vonzó tömeg áll. Ekkor a bezuhanás ideje:  $T = \frac{\pi}{\sqrt{8\gamma M'}} r^{\frac{3}{2}}$ , ahol  $M'$  a rögzített, vonzó tömeg,  $r$  pedig a kezdeti távolságuk. Most  $r = d \frac{M}{m+M}$ .

**.66)** A Föld sugara  $R$ , a Holdé  $0,27R$ , középpontjaik távolsága  $60R$ . A Föld tömege a Holdénak  $81$ -szerese.

- Az első kozmikus sebesség hányszorosával kell (a Naphoz rögzített IR-ből nézve) ellőni egy testet a Föld felszínéről a Hold felé, hogy az eljusson a Holdra? **(1,400-szeresével)**
  - Az első kozmikus sebesség hányszorosával kell (a Naphoz rögzített IR-ből nézve) ellőni egy testet a Földdel mindennel megegyező bolygó felszínéről, hogy a Holdra távolságára jusson, ha annak a bolygónak nem lenne holdja? Ez ugyanaz a kérdés mint az előbbi? **(1,402-szeresével, nem ugyanaz)**
- Az első kozmikus sebesség a körmozgás dinamikai feltételéből adódik:  $v_1^2 = \frac{\gamma M}{R}$ .  
A Hold felé lőtt testet a Föld-Hold szakaszon csak addig a pontig kell eljuttatni, ahol a Hold és a Föld azonos erővel vonzza. Onnantól az eredő erő a Hold maga felé gyorsítja. Az energiamegmaradás adja meg a szükséges kezdősebességet ahhoz, hogy e pontba jutva a sebessége 0 legyen. (Hold, Föld is ad potenciális energijárulékot!)
  - Csak a Föld ad potenciális energijárulékot, és egészen a Hold-távolságig nem szabad elfogynia a sebességnek.