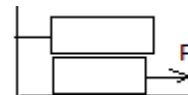


## 5-Erőtörvények



**.1)** Két 3 kg-os téglát fekszik egymáson az ábra szerint.  $\mu=1/3$ . Mekkora erővel lehet egyenletes mozgással kihúzni az alsó téglát? **(30N)**

Az alsó felületen a nyomóerő 60 N, a felsőn 30 N. A meginduláshoz mindkét felületnek csúsznia kell.

**.2)** Egy tárgyat 20 m/s sebességgel vagyunk képesek elindítani: vízszintes sík, súrlódásos felületen csúsztatva, avagy a sík felület adott pontjából alkalmas szög alatt elhajítva. Célunk, hogy az indítás helyétől minél nagyobb távolságra jusson a test.

- A hajítás után a test a leesés helyén marad! Melyik módszert érdemes választani a  $\mu$  súrlódási együttható függvényében? ( $\mu < 0,5$  esetén csúsztatassuk)
- (Csak érettségi előtt állóknak!) Legyen most  $\mu=0,2$ , és essen az elhajított test a súrlódásos felületre úgy, hogy ütközéskor merőleges sebességkomponensét elvesztve, a felületen tovább csúszhat. Alkalmas szögben hajítani, avagy kezdettől csúsztatni érdemes? **(hajítani)**

- A hajításkor legnagyobb távolság  $45^\circ$ -os szög esetén adódik, nagysága könnyen számolható ( $v_0$  és  $g$  segítségével). Csúszáskor a súrlódás  $\mu g$  lassulást okoz, amiből a megállási idő és út számolható. ( $\mu$ ,  $v_0$  és  $g$  segítségével).
- A hajításos mozgásnál a mozgás két részből áll. A hajításszöge a hajítás távolságát, és az utána megmaradó sebességet, és ezzel csúszással megtett további távolságot is meghatározza.

A teljes távolság  $\alpha$  függvényében:  $d(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \left( 2 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{4\mu} \right)$ . Ennek maximuma adja a hajítással elérhető legnagyobb távolságot. (Nem  $\alpha=45^\circ$ -nál!)

Alkalmazzuk a  $\sin 2\alpha$  és  $\cos(\alpha/2)$ -re vonatkozó azonosságokat:  $d(\alpha) = \frac{v_0^2}{4\mu g} + \frac{v_0^2}{g} \left( \sin 2\alpha + \frac{1}{4\mu} \cos 2\alpha \right)$ , majd a megszokott trükköt alkalmazva, és  $\mu=0,2$ -t felhasználva alakítsuk át:  $d(\alpha) = \frac{5v_0^2}{4g} + \frac{v_0^2 \sqrt{41}}{g} \left( \frac{4}{\sqrt{41}} \sin 2\alpha + \frac{5}{\sqrt{41}} \cos 2\alpha \right) = \frac{5v_0^2}{4g} + \frac{v_0^2 \sqrt{41}}{g} \sin(2\alpha + 51,34^\circ)$ . Ennek maximuma  $2,841 \frac{v_0^2}{g}$ . Ezt kell összehasonlítani a csúsztatással elérhető távolsággal.

**.3)** Lehet-e a csúszási súrlódási együttható nagyobb a tapadási súrlódási együtthatónál? **(nem)**

Tegyük fel, hogy  $\mu > \mu_0$ , és hassunk az  $m$  tömegű testre a felülettel párhuzamosan olyan  $F$  erővel, mely között van  $\mu mg$  és  $\mu_0 mg$ -nek. Milyen lesz a mozgása?

**.4)** Az asztalon  $M$  tömegű téglát fekszik, rajta pedig egy  $m$  tömegű. A alsó téglát vízszintesen  $F$  erővel húzzuk. Az asztalon a súrlódási együtthatók:  $\mu_{o1}$  illetve  $\mu_1$ , míg a téglák között  $\mu_{o2}$  illetve  $\mu_2$ . Az  $F$  erő nagyságát 0-ról indulva, folyamatosan növeljük (akkor sem csökkentjük, ha közben a téglák mozgása hirtelen megváltozik).

- Vizsgáljuk meg, hogyan függ az  $F$  erő értékétől a két téglát mozgása! Ábrázoljuk az  $F$  erő függvényében a téglák gyorsulásait.
- Határozzuk meg a téglák gyorsulását az alábbi esetekben:
  - $M=0,5 \text{ kg}$ ,  $m=0,3 \text{ kg}$ ;  $\mu_{o1} = \mu_{o2} = \mu_1 = \mu_2 = 0,2$  esetben az  $F = 1 \text{ N}$ ;  $2 \text{ N}$ ;  $4 \text{ N}$  erők mellett.  
(0 és 0; 0,5m/s<sup>2</sup> és 0,5m/s<sup>2</sup>; 3,6m/s<sup>2</sup> és 2m/s<sup>2</sup>)
  - $M=1 \text{ kg}$ ,  $m=2 \text{ kg}$ ;  $\mu_{o1}=0,4$ ,  $\mu_1=0,35$ ,  $\mu_{o2}=0,2$ ,  $\mu_2=0,15$  esetben az  $F = 10 \text{ N}$ ;  $15 \text{ N}$ ,  $20 \text{ N}$  erők mellett.  
(0 és 0; 1,5m/s<sup>2</sup> és 1,5m/s<sup>2</sup>; 4m/s<sup>2</sup> és 1,5m/s<sup>2</sup>)
  - $M=1 \text{ kg}$ ,  $m_2=2 \text{ kg}$ ;  $\mu_{o1}=0,6$ ,  $\mu_1=0,35$ ,  $\mu_{o2}=0,2$ ,  $\mu_2=0,15$  esetén az  $F = 10 \text{ N}$  ill.  $20 \text{ N}$  mellett.  
(0 és 0; 6,5m/s<sup>2</sup> és 1,5m/s<sup>2</sup>)

- Amíg az alsó téglát meg nem csúszik, addig a felső sem. Így az alsó felület csúszik meg először,  $F_1 = \mu_{o1}(m+M)g$  húzóerőnél. Jelölje a kialakuló gyorsulásokat  $a$  és  $A$ !

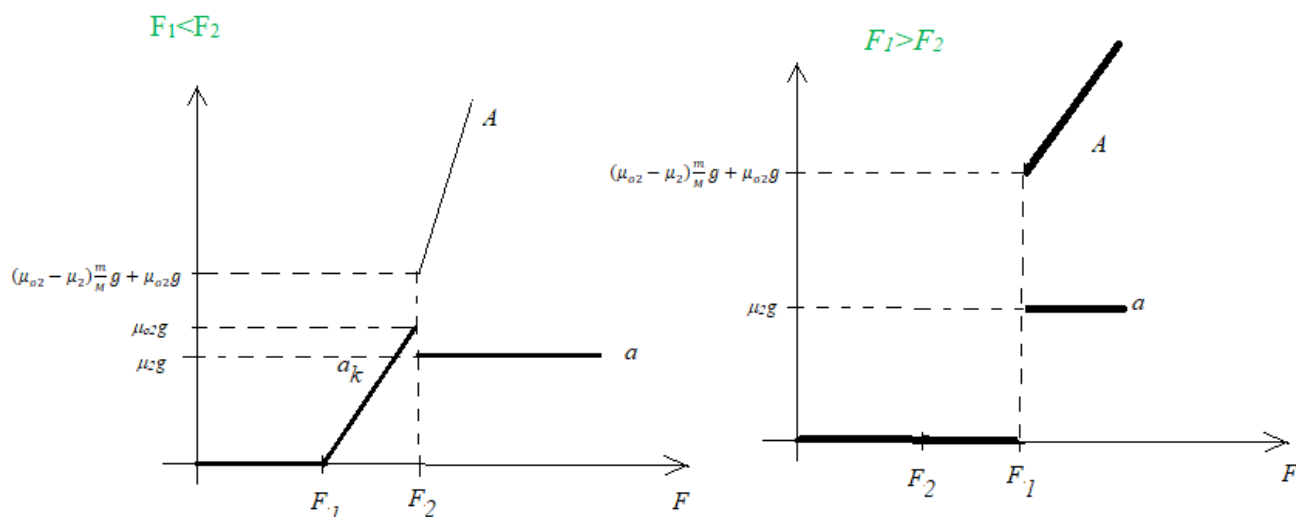
Ha közben a felső felület nem csúszik, akkor együtt gyorsulnak,  $a_{\text{közös}} = F/(m+M) - \mu_1 g$  gyorsulással. Ennek azonban az a feltétele, hogy a két téglát között működő  $K = ma = Fm/(m+M) - \mu_1 mg$  erő ne haladja meg a tapadási súrlódási erő maximumát:  $\mu_{o2} mg$  erőt. Mivel  $K$  lineáris függvénye  $F$ -nek, ez  $F$  növelésével mindig be fog következni. A téglák egymáson történő megcsúszásakor  $F$  értéke:  $F_2 = (\mu_{o2} + \mu_1)(m+M)g$ .

A fenti határon túl tovább növelve  $F$ -et, mindkét felület csúszik, a testekre ható csúszási súrlódási erők miatt a felső és alsó test gyorsulása:  $a = \mu_2 g$ , illetve,  $A = \frac{F}{M} - (\mu_1 + \mu_2) \frac{m}{M} g - \mu_1 g$ .

A felső felület megcsúszása előtt ( $F < F_2$ )  $a_{\text{közös}} = \mu_{02} g$ , utána pedig ( $F > F_2$ )  $a = \mu_2 g$ ,  $A = (\mu_{02} - \mu_2) \frac{m}{M} g + \mu_{02} g$  nem azonosak.

Mivel általában nem nagy különbség van a tapadási és csúszási súrlódási együtthatók között, emiatt általában  $F_1 < F_2$ , ennek felel meg a bal oldali ábra. Itt mindhárom lehetséges eset előfordulhat (mindkét felületen csúszás, avagy egyikén sem, avagy csak az alsónál).

Alkalmassá súrlódási együtthatók esetén azonban  $F_1 > F_2$  is előfordulhat (jobb o. graf.), amikor csak két eset van: mindkét felület csúszik, vagy egyik sem, lehetetlen együtt gyorsulni.



b)

- $F_1 = 1,6 \text{ N}$ ,  $F_2 = 3,2 \text{ N}$
- $F_1 = 12 \text{ N}$ ,  $F_2 = 16,5 \text{ N}$
- $F_1 = 18 \text{ N}$ ,  $F_2 = 16,5 \text{ N}$

**.5)** Az asztalon  $M$  tömegű téglá fekszik, rajta pedig egy  $m$  tömegű. A **felső téglát** vízszintesen  $F$  erővel húzzuk. Az asztalon a súrlódási együtthatók:  $\mu_{01}$  illetve  $\mu_1$ , míg a téglák között  $\mu_{02}$  illetve  $\mu_2$ . Az  $F$  erő nagyságát 0-ról indulva, folyamatosan növeljük (akkor sem csökkentjük, ha közben a téglák mozgása hirtelen megváltozik).

a) Írjuk le, hogyan mozognak a téglák. Az  $F$  erő függvényében ábrázoljuk a téglák gyorsulását.

b) Határozzuk meg a téglák gyorsulását az alábbi esetekben:

- $m = 0,5 \text{ kg}$ ,  $M = 0,3 \text{ kg}$ ,  $\mu_{01} = \mu_1 = 0,1$ ,  $\mu_{02} = \mu_2 = 0,5$ ;  $F = 0,5 \text{ N}$  illetve  $1 \text{ N}$  esetén.

(0 és 0; illetve 0,25 és 0,25  $\text{m/s}^2$ )

- $m = 1 \text{ kg}$ ,  $M = 5 \text{ kg}$ ,  $\mu_{01} = 0,2$ ,  $\mu_1 = 0,15$ ,  $\mu_{02} = 0,4$ ,  $\mu_2 = 0,35$ ;  $F = 10 \text{ N}$ . (0 és 6,5  $\text{m/s}^2$ )

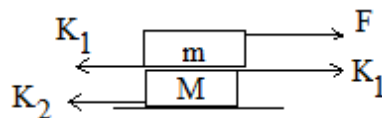
- $m = 3 \text{ kg}$ ,  $M = 2 \text{ kg}$ ,  $\mu_{01} = 0,2$ ,  $\mu_1 = 0,15$ ,  $\mu_{02} = 0,4$ ,  $\mu_2 = 0,35$ ;  $F = 10 \text{ N}$  avagy  $15 \text{ N}$  avagy  $20 \text{ N}$ .

(0 és 0 avagy 1,5 és 1,5  $\text{m/s}^2$  avagy 3,17 és 1,5  $\text{m/s}^2$ )

Az 1. felületet mindig  $(M+m)g$ , a 2-dikát  $mg$  erő nyomja össze, meghatározva az elérhető  $S_1 = \mu_{01}(M+m)g$  és  $S_2 = \mu_{02}mg$  maximális tapadási súrlódási erőket, melyeknél a felületeken ébredő  $K_1$ ,  $K_2$  tapadási súrlódási erők kisebbegyenlők. Csúszó felületeken az  $S'_1 = \mu_1(M+m)g$  és  $S'_2 = \mu_2mg$  csúszási súrlódási erők hatnak. Jelölje a testek gyorsulásának nagyságát  $a$  és  $A$ .

a) Amíg  $F$  kicsi, addig a két felületen tud ébredni olyan kicsi  $K_1$  és  $K_2$  súrlódási erő, hogy a felületek ne csússzanak meg:  $F = K_1 = K_2$ ,  $a = A = 0$ . A meg nem csúszások feletétele:  $F$  ne haladja meg  $S_1$  és  $S_2$  egyikét se. Az  $F$ -et növelve, először a kisebbiket lépjük át  $S_1$  és  $S_2$  közül, ...

b) ...legyen ez  $S_2$ , ekkor a felső felület megcsúszik. Ekkor a felső felületen a súrlódási erő  $S_2$ -ről hirtelen a nála nem nagyobb  $S'_2$ -re változik, és  $F$  további növelésére is ennyi marad. Ennek ellenereje már nem tudja megmozdítani az alsó testet, ha eddig  $S_2$  sem tudta. Tehát  $F$  további növelésekor is az alsó test áll, a felső csúszik rajta. A feltétel:  $S_2 \leq S_1$  és  $F > S_2$ . A gyorsulások:  $a = F/m - \mu_2 g$  és  $A = 0$ .



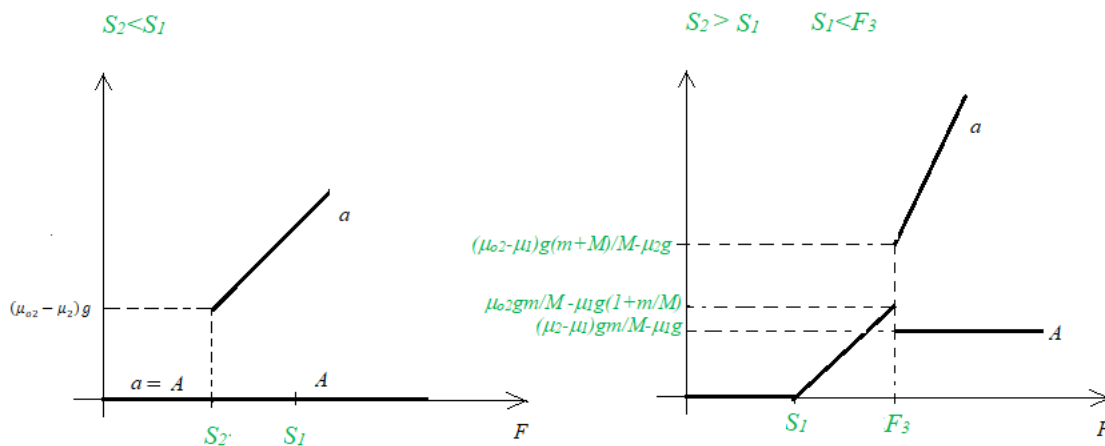
c) ...legyen ez  $S_1$ , ekkor az alsó felület csúszik meg először, innentől kezdve az alsó csúszási súrlódási erő állandó,  $S'_1$  lesz. Ezután  $F$  további növelése kiválthatja a felső felület megcsúszását is:

- i) Feltételezve, hogy a felső felület nem csúszik, azaz **együttesen gyorsulnak**,  $a = A = F/(M+m) - \mu_1 g$  adódik és közöttük hat  $K = F \cdot M/(M+m) + \mu_1 mg$  kényszererő, Ámde:  $K \leq S_2$  szükséges a meg nem csúszáshoz. Ebből  $F \leq F_3 = (\mu_2 - \mu_1)mg(M+m)/M$  adódik. Tehát az együttes gyorsulás pontos feltétele:  $S_1 \leq S_2$  és  $S_1 < F \leq F_3 = (\mu_2 - \mu_1)mg(M+m)/M$ .

[Az  $F_3 < S_1$  eset  $S_1 \leq S_2$  mellett nem fordulhat elő, ugyanis ekkor  $\mu_{01} < \mu_1$  adódna.]

[Felmerülhet a kérdés, hogy nem kell-e még feltételül szabni azt is, hogy az alsó is csúszásban maradjon, azaz  $K > S'_1$ ? Nem, hiszen ez automatikusan teljesül, ugyanis  $K < S'_1$  feltételezés  $F$  és  $K$  kapcsolata miatt  $F$ -re  $F < \mu_1(M+m)g = S'_1$ -vel lenne egyenértékű, amiből  $S'_1 < S_1$  miatt  $F < S_1$  adódna, ami ellentmondana c)-pontbeli feltevésünknek.]

- ii) Amennyiben a felső felület is megcsúszik, akkor a két test rájuk ható  $F$  és  $S'_2$  illetve  $S'_2$  és  $S'_1$  erők hatására gyorsulnak:  $a = F/m - \mu_2 g$ , illetve  $A = (\mu_2 - \mu_1)gm/M - \mu_1 g$ . Ennek pontos feltétele:  $S_1 \leq S_2$  és  $S_1 < F$  és  $F_3 < F$ .



.6) Egy 80 kg tömegű ember a vízszintessel  $60^\circ$ -os szöget bezáró kötél végét húzva, egy állócsiga segítségével akar felemelni egy terhet. Legfeljebb mekkorát tud felemelni, ha a talpa alatt  $\mu_0 = 0,2$ ? (23,77kg)

A kötélen függő test egyensúlyban van, a kötel mindkét végével ugyanakkora erőt fejt ki. Bontsuk komponenseire a kötel által az emberre kifejtett erőt. Alkalmazzuk a meg nem csúszás feltételét a nyugvó emberre.

.7) Az asztal és a test között a súrlódási együttható 0,4. Az testet az asztallal  $75^\circ$ -os szöget húzóerővel szeretnénk odébb húzni.

- Mekkora legyen ez az erő? (0,620 mg)
- És ha ellentétes irányú nyomóerőt alkalmazunk? (-)
- Mekkora lehet a nyomóerő vízszintessel bezárt szöge ahhoz, hogy a test megcsússzon? (max.  $68,2^\circ$ )

A húzó és nyomóerőt komponensekre kell bontani, majd kihasználni, hogy a test nyugalomban van, majd alkalmazni a meg nem csúszás feltételét.

.8)

- Teherautó nyugalomból indul, 3 s-ig  $4 \text{ m/s}^2$  a gyorsulása, majd az elért sebességgel mozog tovább. Kezdetben egy láda állt a rakfelületén.  $\mu = \mu_0 = 0,25$ . Hol lesz a láda a kocsin az indulástól számított 4,5 s és 6 s múlva? (10,69 m, 10,80 m)
- A  $12 \text{ m/s}$  sebességű teherautó  $4 \text{ m/s}^2$  lassulással fékez. Kezdetben egy láda áll a rakfelületén.  $\mu = \mu_0 = 0,3$ . Legalább milyen hosszú legyen a rakfelület az autón a láda előtt, hogy a láda ne ütközzön neki a rakfelület elejének? Mennyit mozdul el a láda a talajhoz képest a teljes folyamat alatt? (6 m, 24 m)

- c) Egy tálcán egy tárgy van,  $\mu_0=0,4$ ,  $\mu=0,3$ . A tálcát kétszer akkora gyorsulással húzzuk, mint amekkora gyorsulásnál a tárgy megcsúszna rajta. Mennyit mozdul el a tárgy az asztalhoz képest, amíg beleütközik a tálca 50 cm távol lévő peremébe? **(30 cm)**

Ha a láda nem csúszik, akkor a tapadási súrlódási erő gyorsítja, de legfeljebb  $\mu_0 g$  nagyságú gyorsulással tudná. Megcsúszás után célszerű a kocsihoz (tágyérhoz) képesti koordináta-rendszert használni (benn a relatív gyorsulással).

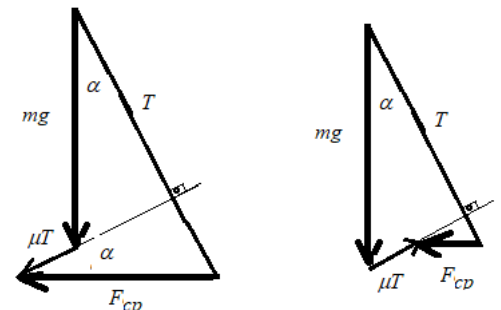
- a) Meg fog csúszni. Az első 3 s-ban a kocsihoz képest, hátrafelé  $1,5 \text{ m/s}^2$  lesz a relatív gyorsulás, majd az ezalatt megszerzett relatív sebességét el fogja veszíteni  $2,5 \text{ m/s}^2$ -es előre mutató gyorsulással, miközben hátrafelé csúszik.
- b) A láda megcsúszik. Az autó egy idő múlva megáll.
- c) Tekintsük a talajhoz viszonyított gyorsulásvektorok és a tárgy tálcahoz képesti gyorsulásvektorának kapcsolatát., Egyenlő idők alatt, nyugalomból indulva, az elmozdulások a gyorsulásokkal arányosak.

**.9)** Mekkora sebességgel haladhat az autó az  $R=50 \text{ m}$  sugarú kanyarban a megcsúszás veszélye nélkül, ha...

- a) ...  $\mu_0=0,5$  és az úttest vízszintes, **(max. 56,92 km/h)**
- b) ...súrlódás nincs, de az úttest  $15^\circ$ -os szöggel be van döntve, **(pontosan 41,67 km/h)**
- c) ...,  $\mu_0=0,2$  és az úttest  $15^\circ$ -os szöggel be van döntve? **(20,44 km/h és 56,60 km/h között)**
- d) Van-e olyan reális súrlódási együttható, ami esetén a  $15^\circ$ -kal megdöntött úton lehetséges legkisebb és legnagyobb sebesség aránya 1:2? **( $\mu=0,154$ )**

A körmozgáshoz szükséges (sebességtől függő) centripetális (eredő) erőt az  $mg$  nehézségi erő, a talajra merőleges  $T$  tartóerő és a talajjal párhuzamos  $S$  tapadási súrlódási erő vektori összege biztosítja. A megcsúszás határán  $S = \mu T$ . Az elkészített vektorábrából  $mg$  és  $\alpha$  segítségével kiszámolható a centripetális erő:

- a)  $F_{cp} = \mu mg$
- b)  $F_{cp} = mg \cdot \tan \alpha$
- c)  $F_{cp} = 0,0645 mg$  illetve  $F_{cp} = 0,4944 mg$
- d) Paraméteresen számolva  $F_{cp} = mg \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$  illetve  $F_{cp} =$
- e)  $mg \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$  a két erő. Továbbá  $F_{cp} \sim v^2$ .



**.10)** \*Egy  $m$  tömegű testet súrlódásos asztalon ( $\mu_0$ ) szeretnénk megindítani a lehető legkisebb húzóerővel, de ennek irányát szabadon megválaszthatjuk.

- a) Legalább mekkora erő szükséges, és milyen irányú legyen ez a minimális erő? Számoljunk paraméteresen! (Figyelem! A  $\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$  addíciós tétel ismerete szükséges!)
- b)  $\mu_0 = 0,4$  esetén mekkora a húzóerő vízszintessel alkotott szöge és a minimális erő? **( $21,8^\circ$ ;  $0,3714 mg$ )**
- c) Ha a minimális erő  $0,5 mg$ , akkor mekkora a súrlódási együttható? **( $1/\sqrt{3}$ )**

A testre ható erőket berajzolva a megcsúszás pillanatában, amikor a tapadási súrlódási erő maximális, továbbá a húzóerőt komponensekre bontva, az alábbi egyenletek adódnak az éppen megcsúszó testre:

$T + F \sin \alpha = mg$   
 $F \cos \alpha = \mu_0 T$ , ahol  $\alpha$  a vízszintessel bezárt szög és  $F$  a húzóerő. (A megoldás után ellenőrizni kell, hogy  $T \geq 0$  –e, azaz a test nem emelkedik-e fel a talajról?) Ebből  $F(\cos \alpha + \mu_0 \sin \alpha) = \mu_0 mg$  adódik. A jobb oldal fix, így  $F$  akkor minimális, ha a zárójel maximális. Annak maximuma akkor van, ha  $\alpha = 90^\circ - \varphi$ , ahol  $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_0^2}}$ .

A minimális erő:  $F^{min} = \frac{\mu_0 mg}{\sqrt{1+\mu_0^2}}$ .

**.11)** (Horváth Ádám ötlete nyomán) Egy nagyméretű, vízszintes síkú,  $\omega$  szögsebességgel forgó korongon  $m = 0,2 \text{ kg}$  tömegű testet  $D = 20 \text{ N/m}$  rugóállandójú rugóval kapcsolunk a korong középpontjához. A rugó nyújtatlan hossza  $r_0 = 0,1 \text{ m}$ . A korongon  $\mu_0 = 0,4$  a tapadási súrlódási együttható.

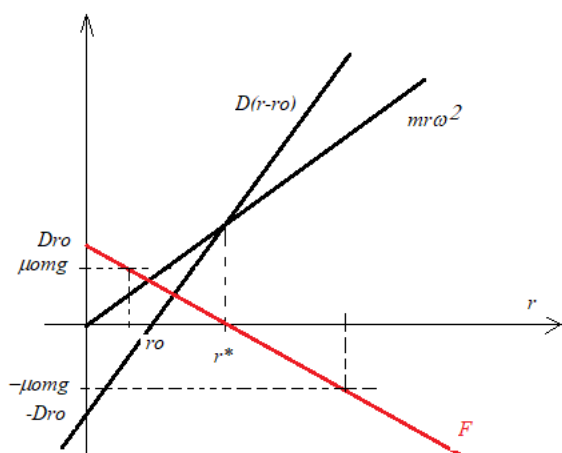
- a) Milyen nagyságú és irányú súrlódási erő hat a testre  $\omega = 6/\text{s}$  szögsebesség esetén, ha  $r = 0,2 \text{ m}$ ? **[0,56 N]**
- b) A középponttól milyen távolságban lehet nyugalomban a test a koronghoz képest, ha  $\omega = 6/\text{s}$  **[0,094 m; 0,219 m]**
- c) És ha  $\omega = 10/\text{s}$ ? **[nincs ilyen]**
- d) A középponttól milyen távolságban lehet nyugalomban a test a koronghoz képest, ha  $D = 6 \text{ N/m}$  és  $\omega = 7/\text{s}$ ? **[0 m; 0,053 m]**

- e) Ha nem túl nagy a forgás szögsebessége, azaz  $D > m\omega^2$ , akkor adjuk meg paraméteresen a legkisebb és legnagyobb lehetséges  $r$  távolságot, ahol a test a koronghoz képest nyugalomban lehet.

$$\left[ \frac{Dr_0 - \mu_0 mg}{D - m\omega^2} \text{ és } \frac{Dr_0 + \mu_0 mg}{D - m\omega^2} \text{ avagy } 0 \text{ és } \frac{Dr_0 + \mu_0 mg}{D - m\omega^2} \right]$$

- a) A körmozgáshoz szükséges centripetális erőt és a rugóerő és a súrlódási erő eredője adja. A centripetális és a rugóerő is lineáris függvénye a test középponttól mért  $r$  távolságnak, így a szükséges súrlódási erő is az. A középpont felé mutató irányt pozitívnak választva, a súrlódási erő  $F = mr\omega^2 - D(r - r_0) = -(D - m\omega^2)r + Dr_0$ . Most  $D > m\omega^2$  miatt a súrlódási erő  $r$ -nek negatív főegyütthatós lineáris függvénye és  $Dr_0 > \mu_0 mg$ .
- b) A súrlódási erő abszolút értéke legfeljebb  $\mu_0 mg$ .
- c) F súrlódási erőnek mindenütt 2 N-nak kellene lennie.
- d) Most  $D < m\omega^2$  miatt a súrlódási erő  $r$ -nek pozitív főegyütthatós lineáris függvénye, és  $Dr_0 < \mu_0 mg$ .
- e) A súrlódási erőszükséglet  $r$ -nek negatív főegyütthatós lineáris függvénye, mely az  $r=0$  helyhez tartozó  $Dr_0$  értéktől kezdve szigorúan monoton csökken.

Ha  $Dr_0 > \mu_0 mg$ , akkor a lehetséges  $r$  értékek számára egy olyan intervallum adódik, melynek közepe  $r^* = \frac{Dr_0}{D - m\omega^2}$ , fél szélessége pedig  $\frac{\mu_0 mg}{D - m\omega^2}$ . Ha  $Dr_0 < \mu_0 mg$ , akkor már  $r=0$  esetén is lehet nyugalom (a koronghoz képest).



**.12)** Egy nagyméretű, vízszintes síkú,  $\omega$  szögsebességgel forgó korongon  $m = 0,2 \text{ kg}$  tömegű testet  $D$  rugóállandójú rugóval kapcsolunk a korong középpontjához. A rugó nyújtatlan hossza  $r_0 = 0,1 \text{ m}$ . A korongon  $\mu_0 = 0,4$  a tapadási súrlódási együttható. Adott  $r$  távolság esetén keressük meg azt a *minimális és maximális szögsebességet*, amelynél a test még nem csúszik meg a korongon!

- a) Legyen  $D = 1 \text{ N/m}$ ,  $r = 0,05 \text{ m}$ . [0/s ; 8,66/s]  
 b) Legyen  $D = 1 \text{ N/m}$ ,  $r = 0,3 \text{ m}$ . [0/s ; 4,08/s]  
 c) Legyen  $D = 20 \text{ N/m}$ ,  $r = 1 \text{ m}$ . [29,33/s ; 30,66/s]

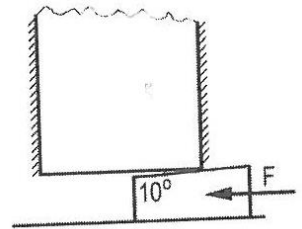
- d) Igen nagy  $r$  távolság esetén mekkora lehet a szögsebesség?  $\left[ \sqrt{\frac{D}{m}} \right]$

A centripetális erőt a rugóerő és a súrlódási erő eredője adja. A középpont felé mutató irányt pozitívnak választva, a súrlódási erő  $F = mr\omega^2 - D(r - r_0)$ . Mivel ez az  $\omega^2$ -nek lineáris függvénye, továbbá  $F$  a  $[-\mu_0 mg, \mu_0 mg]$  intervallumba esik, ezért mindig egy intervallum adódik  $\omega^2$  számára. Nyilván ezen intervallum bal szélé nem lehet negatív.

**.13)** A  $0,2 \text{ m}$  hosszú fonállal kikötött testet vízszintes felületen körpályára indítjuk  $3 \text{ m/s}$  kezdősebességgel. A test tömege  $0,5 \text{ kg}$ , a súrlódási együttható  $0,4$ .

- a) Mekkora szöggel fordul el a fonál az indulástól a megállásig? (**322°**)
- b) Mekkora a fonálerő az indítástól számított 0,6 s múlva? (**0,900 N**)

A test a kerület mentén lassul a súrlódási erő miatt.



**.14)** Egy oszlopot két fal között az ábra szerint  $10^\circ$ -os ékkel emelünk. A súrlódást csak az ék és a talaj között vesszük figyelembe, itt a súrlódási együttható 0,2. Az ék tömegétől tekintsünk el.

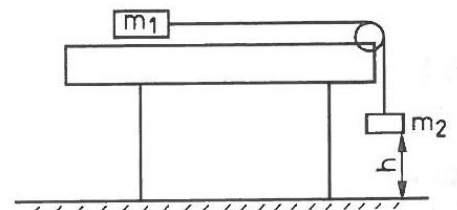
- a) Az oszlop egyenletes emeléséhez az ékre 1000 N nagyságú, vízszintes erővel kell hatni. Mekkora az oszlop tömege? (**265,7 kg**)
- b) Mekkora a munkavégzésünk hatásfoka az oszlop emelése közben? (**46,85 %**)
- c) Mekkora vízszintes erő szükséges az oszlop egyenletes süllyesztéséhez? (**62,91 N**)
- d) Mekkora legyen a súrlódási együttható, hogy az oszlopot fele akkora ékre ható erővel lehessen süllyeszteni mint emelni? (**0,529 vagy 0,0588**)

Az ék az oszlopra felületre merőleges erőt fejt ki (az oszlopra más erőnek is kell hatnia).

Az ékre a vízszintes tolóerő, a súrlódási erő és a talaj tartóereje hat.

Egyensúly van.

**.15)** Vízszintes asztallapra helyezett  $m_1=10$  kg tömegű testhez csigán átvetett fonál végére függesztett  $m_2=5$  kg tömegű testet kötünk. Kezdetben az  $m_1$  tömegű test 3 m távolságra áll a csigától,  $m_2$  tömegű test pedig  $h=1,2$  m magasan van a talaj felett. Az asztallap és a rajta lévő test között a súrlódási együttható 0,3.



- a) Mekkora sebességgel ér a fonál végén függő test a talajra? (**1,78 m/s**)
- b) A csigától milyen távolságban áll meg az  $m_1$  tömegű test? (**1,27 m**)

Előbb gyorsul a rendszer, amíg az első test földet ér, majd az asztalon lévő teste a súrlódás miatt elveszíti sebességét.

**.16)** Liftben gumikötelet megnyúlás nélkül, vízszintesen rögzítünk, majd nehezéket akasztunk a közepére. Az álló liftben a gumiszál  $30^\circ$ -os, a gyorsuló liftben  $35^\circ$ -os szögben hajlik lefelé a vízszinteshez képest. Milyen a lift gyorsulásvektora és merrefelé megy a lift (**6,37 m/s<sup>2</sup>, sebesség iránya ismeretlen**)

A test kezdetben nyugalomban van, a (gumi)kötél ereje számolható, továbbá a kötél megnyúlása is.

Az új helyzetben előbb a kötél megnyúlása, majd ebből az új kötélerő számolható.

A most ható 3 erő eredője is számolható, mely a gyorsulást okozza.

**.17)** Nagy magasságból levegőben régóta eső golyó tömege 93 g, sugara 10 cm. Esés közben 36 km/h sebességű vízszintes szél fúj. A levegő sűrűsége  $1,29 \text{ kg/m}^3$ , alak tényező 0,225. Mekkora szögben és mekkora sebességgel csapódik a talajhoz a golyó? (**55,00°; 62,77 km/h**)

Hosszú idő után a test sebességének vízszintes komponense a szélsebességgel egyenlő lesz, (Vízszintesen csak a szél fejt ki erőt.)

Függőlegesen addig nő a sebesség, amíg a gyorsulás 0-vá nem válik. Ekkor a nehézségi erő tart egyensúlyt a függőleges közegellenállási erővel, amiből a függőleges sebesség számolható.

**.18)** Két azonos anyagú gömb egyikének sugara duplája a másikénak. Fonallal összekötjük, és nagy magasságból levegőben leejtjük őket. A kisebb golyó tömege  $m$ .

- a) Melyik lesz alul esés közben? (**nagy**)
- b) Mekkora erő feszíti a fonalat? (**0,8 mg**)

A nagy test sugara  $2r$ , tömege  $8m$ . Rájuk  $F_k$  és  $4F_k$ , ugyanis a sebesség azonos, a homlokl felületek aránya 1:4.

A két testből álló rendszer hosszú idő után egyensúlyban nvan:  $9mg=5F_k$ . Így  $F_k= 1,8mg$ .

Most a kicsi tesre a  $F_k$  és  $mg$  eredője felfelé hatna, ezt kell 0-ra kompenzálnia a kötelerőnek, ami így lefelé hat, tehát a kis test felül van.

**.19)** Egy 8 kg tömegű, üres merev falú gömbhéjba egy másik, 8 kg tömegű tömör gömböt teszünk. A rendszert nagy magasságból levegőben leejtjük. A közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányos,  $1 \text{ m/s}^2$  esetén 0,1 N.

a) Mekkora az elért legnagyobb sebesség? (**40 m/s**)

b) Ábrázoljuk a két test közötti nyomóerőt az elért sebesség függvényében. (**a sebességnek másodfokú függvénye, 0-80 N között**)

a) A testek közös gyorsulását a nehézségi és a (csak) nagy gömbre ható közegellenállási erő okozza.

Az idővel beálló állandó sebesség esetén már nincs gyorsulás.

b) Az esés során a két gömb között ható nyomóerő felelős azért, hogy a belső gömb nem  $g$ , hanem kisebb gyorsulással esik.

**.20)** A Merkúr pályájának fél nagytengelye  $57,90 \cdot 10^6 \text{ km}$ , fél kistengelye  $56,66 \cdot 10^6 \text{ km}$ , keringési ideje 74,8 nap. Mennyi a Merkúr területi sebessége? Mekkora sebességgel halad a Merkúr napközben és naptávolban? ( **$1,595 \cdot 10^9 \text{ km}^2/\text{s}$ ; 69,38 km/s; 45,69 km/s**)

Az ellipszis területe  $ab\pi$ .

A lineáris excentricitás számolható:  $c^2=a^2-b^2$ . A távolságok napközben és naptávolban:  $a-c$  és  $a+c$ . Alkalmazzuk Kepler II. törvényét.

Napközben a sebesség merőleges a vezérsugárra, a rövid  $\Delta t$  alatt a vezérsugár egyenlőszárú ( $a-c$  szárú),  $v\Delta t$  alapú háromszöget sírol.

**.21)** A Halley-üstökös pályájának fél nagytengelye  $5700 \cdot 10^6 \text{ km}$ , fél kistengelye  $1080 \cdot 10^6 \text{ km}$ , keringési ideje 76,2 év. Mekkora a Halley-üstökös sebessége napközben és naptávolban? (**156 km/s; 1,42 km/s**)

Előbb a területi sebesség számolandó, majd Kepler II. törvényét kell alkalmazni napközben és –távolban.

**.22)** Mennyi idő alatt esne a Föld a Napba illetve a Hold a Földbe, ha hirtelen nullára csökkenne a kerületi sebessége? (**64,6 nap; 4,83 nap**)

A Föld a Napba olyan elfajuló ellipszispályán esne, melynek kistengelye 0. Így  $c=a$ , tehát **a fókuszok a nagytengely végpontjaiban vannak.**

Az eredeti körmozgását végző Föld pályájának  $R$  sugara lesz most a nagytengely, így a **nagytengely hossza felére csökkent.** Kepler III. törvénye miatt így **a keringési idő  $\sqrt{8}$ -ad részére csökken.**

A Napba esés **fél keringési idő** alatt történik.

**.23)** A Föld – Nap rendszer minden méretét (a pályasugarakat és az égitestek sugarát) úgy kicsinyítjük le, hogy a pályasugár  $1 \text{ m}$  legyen, de az égitestek *sűrűségei változatlanok* maradjanak. Mekkora volna ebben a modellben a Föld keringési ideje? (**1 év**)

A centripetális erőt a gravitációs vonzóerő adja. Ebből a Föld tömege „kiesik”.

Mivel azonban a sűrűség állandó, a Nap tömege a térfogattal arányosan csökken, az pedig a lineáris méretváltozás köbének arányában. A jobb oldalon a  $r^3$  szintén ugyanilyen arányban. Tehát  $T$  nem változik.

**.24)**  $m_1$  és  $m_2$  tömegű csillagok egymástól  $R$  távolságban körpályákon keringenek közös súlypontjuk körül. Mennyi a keringési idejük?  $\left[ 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\gamma(m_1+m_2)}} \right]$

A tömegközéppont helye számolható.

A gravitációs erő biztosítja a centripetális erőt, ez utóbbiban található a keringési idő.

**.25)** Két, egyenként  $5,074 \cdot 10^{30}$  kg tömegű csillag egymástól mért távolsága 8 millió km. Közös tömegközéppontjuk körül körpályán keringenek. Mennyi a csillagok keringési ideje? **(2,00 nap)**

A tömegközéppont középen van. A gravitációs erő biztosítja a centripetális erőt.

**.26)** Két galaktika egymástól  $2 \cdot 10^6$  fényév távolságban van, mindegyikük tömege  $2 \cdot 10^{41}$  kg. Egymás körül nem forognak. Kölcsönös vonzásuk hatására mekkora gyorsulással indulnak el egymás felé és 1 év alatt mekkora utat tesznek meg? **( $3,72 \cdot 10^{-14} \frac{m}{s^2}$ ; 18,5 m)**

A gyorsulást a gravitációs vonzóerő okozza.

**.27)** Mekkora az átlagos sűrűsége annak a gömb alakú bolygónak, mely a tengelye körül 6 óra alatt fordul meg és amelynek az egyenlítőjén a testek súlyát 10%-kal kevesebbnek mérjük mint a pólusán? **(3029 kg/m<sup>3</sup>)**

A pólusokon a test (pl. a Naphoz rögzített) IR-ben nem gyorsul, míg az egyenlítői test körmozgást végez.

A sarkon a súly a  $F_{gr}$  gravitációs erővel egyenlő. Az egyenlítőn  $F_{gr} - T = F_{cp}$  és  $T$  a súlyerővel egyenlő.

Így  $F_{cp}$  10%-a az  $F_{gr}$ -nek. Felírva mindkettő képletét, adódik az összefüggés  $R$  és a forgás periódusideje között.

A sűrűség  $M/V$ .

**.28)** Az  $R$  rádiuszú,  $m_2$  tömegű karika középpontjában, síkjára merőlegesen rajzolt egyenesen, a karika középpontjától  $r$  távolságban  $m_1$  tömeg van.

a) Mekkora erővel vonzzák egymást?  $\left( \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cos^3 \propto \right)$

b) \*Az  $m_1$  tömeg mely helyzetében a legnagyobb a vonzóerő?  $\left( r = \frac{R}{\sqrt{2}} ; F_{\max} = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} \frac{2}{3\sqrt{3}} \right)$

a) Vegyünk a karika kerületén egy  $\Delta m_2$  kicsi darabot. A rá ható gravitációs erőnek csak a tengelyirányú komponense a fontos (ui. a másik komponenst kiejti a kerületen szemben lévő darab hasonló komponense). Összegezzük ezen komponenseket a karika teljes kerülete mentén.

b) Az erőben csak az  $r$  ismeretlent meghagyva:  $\gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}^3}$ . Vezessük be  $x = \sqrt[3]{r^2}$  jelölést. Keressük az

$f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{R^2 + x^3}^3} = \sqrt{\frac{x}{R^2 + x^3}}$  függvény maximumát. (Mivel a  $\sqrt{x}$  és az  $x^3$  függvények szigorúan monoton növekedőek, ezért) elegendő keresni az  $\frac{x}{R^2 + x^3}$  függvény maximumát pozitív  $x$ -ekre. Avagy a reciprokanak a minimumát:  $\frac{R^2}{x} + x^2$  kell keresni. Ez utóbbihoz  $\frac{R^2}{2x} + \frac{R^2}{2x} + x^2$  átalakítás után a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával juthatunk.

**.29)** A talajközeli felmelegedést követően felszálló meleg légáramlatokban lévő vízgőz a magasban a lehűlés miatt telítetté válik, és többnyire földi eredetű szennyeződéseknek kicsapódik. A vízcseppek átmérője ekkor kb. 20 mikrométer. Ezek a cseppek a környező levegőhöz képest lefelé kezdenek esni. Ez a sebesség elég kicsi ahhoz, hogy a csepp körüli légáramlás „réteges”nek (lamináris) legyen tekinthető. Ekkor a fellépő közegellenállási erő nagysága csak a sebesség első hatványával arányos:  $F_k = 6\pi\eta r v$ . (Ahol  $r$  a csepp sugara,  $\eta$  pedig a közeg anyagára jellemző, a hőmérséklettől jelentősen függő viszkozitás.)

a) Mekkora sebességgel esik egy 20 cm átmérőjű vízcsepp a környező levegőhöz képest, ha a levegő viszkozitása a felhőben uralkodó 0°C hőmérsékleten  $\eta = 1,71 \cdot 10^{-5} Pa \cdot s$ , sűrűsége pedig 1,30 kg/m<sup>3</sup>? **(1,30 cm/s)**

- b) A talaj közelébe érve az esőcsepp (sorozatos egyesülések és a környező levegő páratartalmának rácsapódása miatt) már 0,7 mm átmérőjűvé hízik. Mekkora lesz most a sebessége, ha az áramlás továbbra is réteges marad? **(15,93 m/s)**
- c) Méz üvegbe öntésekor 4 mm átmérőjű levegőbuborék került a mézbe, ami a felszín alatt 20 cm mélységben van. Mennyi idő alatt jön fel a méz felszínére? A méz viszkozitása 10 Pas, a sűrűsége 1,4-szerese a víz sűrűségének, a levegő sűrűsége 1,30 kg/m<sup>3</sup>. **(10,7 óra)**
- d) A méz pergetésekor sokkal kisebb levegőbuborékok is kerülnek a mézbe. Amikor ezek a felszínre jönnek, finom fehérnek látszó hab keletkezik a méz felszínén. Egy ilyen buboréknak a hordóban 1 m mélységből egy hétig tart, amíg a felszínre jut. Mekkora volt az átmérője? (Tekintsünk el a méret változásától a folyamat alatt.) **(0,146 mm)**
- a) A cseppre ható három erő egyensúlyt tart, amikor az állandósult esési sebesség már kialakult: nehézségi, felhajtó és közegellenállási erő. Az egyensúlyból:  $v = \frac{2g}{9\eta}(\rho - \rho_{közeg})r^2$ . (A levegőközeg sűrűsége a vízéhez képest nagyon kicsi, így a felhajtóerőnek itt alig van szerepe.)
- b) A lineáris méret 35-szörösére nőtt, a sebesség a sugár négyzetével arányos.
- c) Most a levegő tartalmú gömböcskére ható felhajtóerő nagyobb a nehézségi erőnél, de a mézkörnyezet viszkozitása is jelentősen nagyobb:  $v = \frac{2g}{9\eta}(\rho_{levegő} - \rho_{méz})r^2$ . (Negatív eredményt ad, a buborék felfelé jön.) A felfelé úton a sebesség állandó.

**.30)** Egy gömb alakú homogén bolygóból kibányászunk egy fele akkora sugarú gömb alakú üreget, mely a P pontban érinti az eredeti bolygófelszínt. Az eredeti bolygó felszínén mért gravitációs gyorsulásnak hányad része lesz a gravitációs gyorsulás a bolygó felszínétől R távolságra, illetve a bolygó felszínén ...

- a) ....az eredeti középpontból a P ponton átmenő félegyenest mentén? **(19,4%; 50%)**
- b) ...ezen félegyenessel ellentétes félegyenest mentén? **(23,0%; 94,4%)**
- c) ....ezen félegyenestre merőleges, az eredeti középpontból induló félegyenest mentén? **(22,2%; 91,2%, irányuk nem az eredeti középpont felé mutatnak!)**

Béla szerint az előző kérdésekre csak hosszadalmas számolások után lehetett válaszolni. Helyette egyszerűbbet javasol: Az eredeti bolygóból megmaradó 7/8 tömegű részt gondolatban ponttá zsugorítjuk a megmaradó rész tömegközéppontjába. Innentől a megmaradó rész gravitációs vonzóereje könnyen számolható bármely pontban.

- d) Számoljuk ki ilyen megfontolásokkal a P pontbeli gravitációs gyorsulást és vessük össze a fent számolt értékkel. **(76,2%, nem egyezik)**
- e) Hol a hiba Béla gondolatmenetében? **(?)**

a-c) A maradék test és az eltávolított test együttes vonzóereje egy adott pontban éppen az eredeti gömb vonzóerejét adja, tehát  $F_{maradék} = F_{teljes} - F_{elvett}$  (vektorkivonás!)  
 $F_{gr} = mg$  alapján adódnak a keresett  $g$  gyorsulások.

.d) A maradék test TKP-je az eredeti középponttól R/14-re van.

.e) Egy testet a tömegközéppontjába ponttá zsugorítva, a rajta kívüli testekre kifejtett gravitációs vonzóerő megváltozhat!

Gömb esetén, ha az teljes anyagában homogén, vagy legalábbis gömbhéjanként homogén, akkor nem változik meg a „kifelé” mutatott gravitációs hatása összezsugorítással. Ez a gravitációs erőtvény  $1/R^2$ -es jellegéből adódik. Nem gömb alakú testeknél ez nem feltétlenül igaz.

Így pl. a maradék test által kifejtett gravitációs erő nem is mindig a maradék test TKP-jának irányába mutat! (Célszerű ellenőrizni a .c) pont esetében.)

**.31)** A Föld sugara R, a Holdé 0,27R, középpontjaik távolsága 60R. A Föld tömege a Holdénak 81-szerese.

- a) Melyik égitest átlagsűrűsége nagyobb? **(a Földé 1,59-szer)**
- b) A Föld-Hold egyenesen hol van az a pont, ahol a két égitest ugyanakkora erővel vonzza az űrhajót? **(54R távol a Föld középpontjától)**
- c) Hol van a két égitest rendszerének tömegközéppontja? **(A Föld felszíne alatt, a középponttól 0,732R távolságra)**

.a)  $\rho = M/V$

- .b)  $F_1 = F_2$  miatt a tömeg a távolság négyzetével egyenesen arányos.  
.c) A tömegekkel fordított arányban kell felosztani a távolságot.

**.32)** Számítsuk ki a Föld tömegét és átlagsűrűségét az  $R = 6307$  km sugár és a felszínen mért  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  gravitációs gyorsulás értékéből. ( **$5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ;  $5510 \text{ kg/m}^3$** ) )

$$M = \frac{gR^2}{\gamma} \text{ és } \rho = \frac{3g}{4\pi M}$$