

# 4-Newton-törvények

A nehézségi gyorsulás értéke legyen  $g=10 \text{ m/s}^2$  !

**.1)** Vízszintes talajon négy erő hat egy testre:  $6,6 \text{ N}$  É-felé;  $5,5 \text{ N}$  kelet felé;  $4,4 \text{ N}$  D-felé;  $3,3 \text{ N}$  Ny-felé. A test gyorsulása  $2,2 \text{ m/s}^2$ . Mekkora a tömege? **(1,41 kg)**

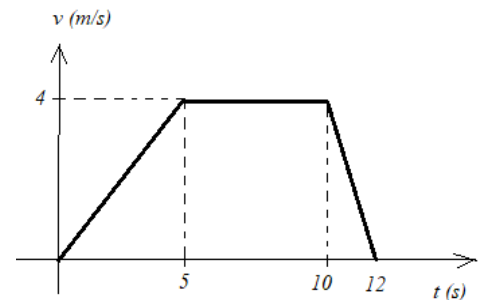
Az erők eredője határozza meg a gyorsulást. Előbb É-D, majd K-Ny irányba összegezzük az erőket.

**.2)** Mekkora tömegű testet mozgathatunk a nehézségi erőterben  $2 \text{ m/s}^2$  gyorsulással felfelé illetve lefelé, ha a kötel  $100 \text{ N}$  erőt bír ki? **(felfelé max. 8,33 kg; lefelé max. 12,5 kg)**

A kötél-erő és a nehézségi erő adják az eredőt, mely a gyorsulás irányába mutat.

**.3)** Egy toronydaru kötelére  $2$  tonna tömegű teher van kötve. Az emelés sebessége a grafikon szerint változik. Ábrázoljuk a kötel által kifejtette erőt az idő függvényében. **( 21,6 kN; 20 kN; 16 kN)**

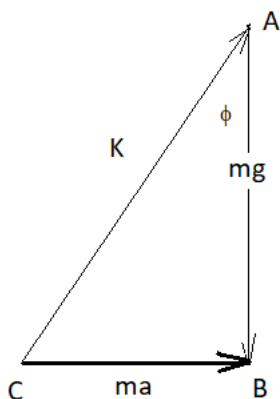
A kötél-erő és a nehézségi erő adják az eredőt, mely a gyorsulás irányába mutat



**.4)** Könnyen mozgó kiskocsiban fonálinga függ. A kocsi mozgása a földhöz képest már régóta ugyanolyan, így a fonál már beállt egy egyensúlyi helyzetbe. Milyen irányú a fonál, ha a kiskocsi...

- ... vízszintesen egyenletesen halad, avagy egy lejtőn lefelé gurul állandó sebességgel? **(függőleges)**
- ... vízszintesen  $a$  gyorsulással mozog? **( $\tan \phi = a/g$ )**
- ...  $\alpha$  hajlásszögű lejtőn súrlódás nélkül gurul? **(lejtőre merőleges)**
- ...  $\alpha$  szögű lejtőn  $\mu$  súrlódási együttható mellett gurul? **( $\alpha - \beta$  szöggel a függőlegeshez, ahol  $\tan \beta = \mu$ )**
- Az  $\alpha$  szögű lejtőn guruló kocsi esetén változzon a  $\mu$  súrlódási együttható  $0$ -tól egészen  $\tan \alpha$ -ig. Hogyan változik eközben a fonál állása? **(„Előre” hajlik, a lejtőre merőleges helyzettől egészen a függőlegesig.)**
- Hogyan áll a kocsiban lévő edényben a vízfelszín az előző esetekben? **(merőlegesen a fonál irányára)**

Az összes szituációban közös, hogy a függőleges irányú nehézségi erő és a fonál-erő eredője biztosítja az  $ma$  erőt, ahol a neheze  $a$  gyorsulása más és más az egyes esetekben.

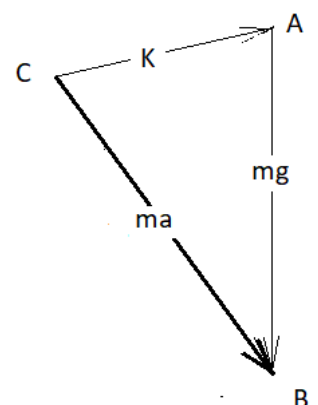


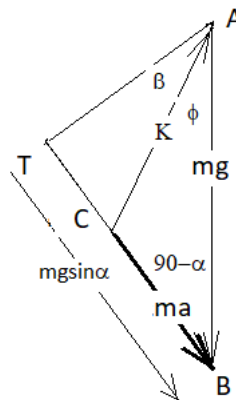
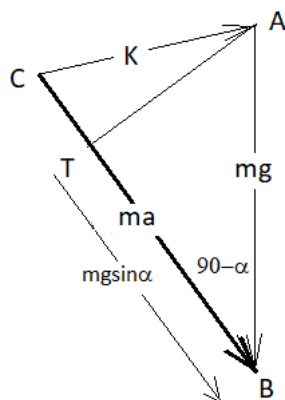
**a)** Egyenletesen haladó kocsi esetén (mindegy a haladási iránya!)  $a=0$ , így  $K = -mg$ , azaz a  $K$  és a fonál iránya  $g$  irányú, azaz függőleges.

**b)** A gyorsulás most vízszintes, tehát a vektorháromszögből a fonál szögére  $\tan \phi = ma/(mg)$ .

**c)** A lejtőn mozgáskor a gyorsulás iránya a lejtővel párhuzamos, így a vektorháromszögben  $ma$  és  $mg$  szöge pontosan  $90^\circ - \alpha$ , ahol  $\alpha$  a lejtő szöge. Ha nincs súrlódás a lejtőn, akkor  $a = g \sin \alpha$ , tehát az ábrán  $CB = ma = m g \sin \alpha$ . Most ABC háromszögben ismerjük AB és CB oldalakat és bezárt szögüket. Ebből kell meghatározni a A-nál lévő szöget. Lehetne előbb egy koszinusztétel, majd egy szinusztételt is alkalmazni,

de egyszerűbb(!), ha észrevesszük, hogy AB oldal merőleges vetülete BC oldalra  $BT = mg \cos(90^\circ - \alpha) = m g \sin \alpha$ . Mivel  $BT = CT$ , emiatt C és B egybeesik, tehát a fonál szöge  $\phi = \alpha$ , azaz a lejtőre merőleges a fonál.





- d) A súrlódás is van a lejtőn, akkor  $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ , így az ábrán  $CT = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ , miközben továbbra is  $BT = mg\cos(90-\alpha) = mgsin\alpha$ , ezek különbsége  $TC = \mu mg\cos\alpha$  és ACT háromszögből  $\beta$  számítható.
- e) Az ábrán a C pont T-től B-ig mozog.
- f) A folyadékban nincsenek nyíróerők, így a szabad folyadékfelszín mindig merőleges a felületen lévő részecskékre ható kényszererőre (K-ra).

**.5)** Egy  $\alpha = 30^\circ$ -os hajlásszögű, súrlódásmentes lejtőre szeretnénk egyenesen felhúzni egy 40 kg tömegű testet. Mekkora erőt kell kifejtenünk, ha lejtővel párhuzamos irányba, illetve ha vízszintes irányba húzzuk? **(200 N; 231N)**

Mivel a mozgás a lejtővel párhuzamosan zajlik csak, célszerű az erőket lejtővel párhuzamos és rá merőleges komponensekre bontani.

Párhuzamosan húzva, a nehézségi erő párhuzamos komponensét kell lerontanunk, hiszen a mozgás egyenes.

Vízszintesen húzva, a húzóerőnek a lejtővel párhuzamos komponense rontja le a nehézségi erő párhuzamos ezen komponensét.

**.6)** A  $\alpha = 30^\circ$ -os hajlásszögű, súrlódásmentes lejtőn lefelé szeretnénk mozgatni egy testet, de csak vízszintes húzóerőt alkalmazhatunk.

- a) Legfeljebb mekkora gyorsulást érhetünk el? **(2g)**
- b) Mekkora a lejtő hajlásszöge, ha az elérhető maximális gyorsulás  $3g$ ? **(19,47°)**

- a) A testre 3 erő hat:  $mg$  nehézségi-,  $F$  húzóerő,  $T$  tartóerő. Az  $F$  és az  $mg$  erők lejtő irányú komponensei összeadódva gyorsítanak:  $ma = F\cos\alpha + mgsin\alpha$ , míg a lejtőre merőlegesen nincs gyorsulás, azaz az erők itt egyensúlyt tartanak:  $T + Fsin\alpha = mg\cos\alpha$ . Ám ahhoz, hogy közben a test fel ne emelkedjen a lejtőről,  $T$  iránya csak felfelé mutathat, azaz  $Fsin\alpha$  legfeljebb  $mg\cos\alpha$  lehet. Ez ad  $F$ -re egy felső korlátot, amivel meghatározza a gyorsulás maximumát.
- b) Számoljuk paraméteresen számolva a maximális gyorsulást ( $a^{max} = g/sin\alpha$ ), amiből egyenlet adódik  $\alpha$ -ra.

## Körmozgás

**.7)** 72 km/h sebességű, 1000 kg tömegű kocsi pályája a völgy alján 50 m sugarú, a domb tetején 100m sugarú körívvel közelíthető.

- a) Mekkora erővel terheli a kocsi az utat a völgy alján, illetve a domb tetején? **(18.000N; 6.000N)**
- b) Mekkora lehetne a domb tetején a sebessége, hogy el ne váljon az úttesttől? **(31,62 m/s)**

- a) Körmozgás esetén az eredő erő a sebességtől függő, előírt nagyságú kell, hogy legyen, iránya pedig mindig a középpont felé mutat. (centripetális erő). A tartó felület kényszerereje pedig akkora, hogy mindez létrejöhessen. A völgyben is és a dombon is ellentétes a nehézségi erő a tartóerővel, de az eredő erőnek a völgyben felfelé, a dombon lefelé kell mutatnia!
- b) A dombon a kényszererő nem mutathat lefelé, hiszen a talaj csak tartja a teste, lefelé húzni nem tudja! Elváláskor a tartóerő 0 lenne, egyedül a nehézségi erő biztosítja a centripetális erőszükségletet.

**.8)** Negyedkörív alakú, 60 m magas híd tetejéről 72 km/h állandó sebességgel jön lefelé egy autó. Végig a hídon marad-e, illetve hol válik el tőle, ha nem? **(48,2°)**

Az elválás pillanatában (ha lesz ilyen), a tartóerő 0, az  $mg$  sugárirányú komponense adja a sebességhez tartozó centripetális erőt.

**.9)** 110 N-ig terhelhető, 1 m hosszú fonálon 1 kg tömegű test függőleges síkban körmozgást végez. A fonál éppen akkor szakad el, amikor a test legalul van.

- a) Mekkora a test sebessége az elszakadáskor? **(10 m/s)**
- b) Mekkora sebességnél szakadna el a fonál, ha a forgatás vízszintes síkban történne, és a fonál másik vége is ugyanabban a síkban lenne rögzítve? **(10,48 m/s)**
- a) A centripetális erő felfelé mutat, és 100 N nagyságú.
- b) Most vízszintesen mutat a kör középpontja felé és 110 N, mert függőlegesen nincs gyorsulás, így a nehézségi és a tartóerő egymást lerontja.

**.10)** 1500 km/h sebességű sugárhajtású repülőgép vízszintes síkban fordul.

- a) Mekkora lehet fordulókör sugara, ha a pilóta gyorsulása nem haladhatja meg a nehézségi gyorsulás 5-szörösét? **(legalább 3472 m)**
- b) Mekkora a 75 kg-os pilóta súlya és tömege eközben? **(3824 N; 75 kg)**
- a)  $5mg$  a centripetális erő.
- b) A tömeg nem változik, a súly (amivel az alátámasztást nyomja) ellenereje az ülés által kifejtett erő, aminek vízszintes és függőleges komponensei:  $5mg$  ill.  $mg$ .

**.11)** 1500 km/h sebességű sugárhajtású repülőgép függőleges síkban fekvő körpályán mozog.

- a) Mekkora lehet kör sugara, ha a pilóta gyorsulása nem haladhatja meg a nehézségi gyorsulás 5-szörösét? **(legalább 3472 m)**
- b) Mekkora a 75 kg-os pilóta súlya és tömege eközben? **(alul 4500 N és 75 kg; felül 300 N és 75 kg)**
- a) A körön legfeljebb ugyanakkora lehet a centripetális gyorsulás mint a vízszintes helyzetben, így a kör sugara is legalább ugyanakkora.
- b) A tartóerő és a nehézségi erő iránya felül azonos, alul ellentétes, de eredőjük mindkét helye  $5mg$ .

**.12)** Egy 100 m széles folyó két oldalát domború körív alakú híd köti össze. A híd által meghatározott körszelet magassága 10 m. A híd maximális teherbíró képessége 50 000 N. Áthaladhat-e a hídon, és ha igen, milyen állandó sebességgel egy 6 000 kg tömegű autó? **(igen, minimum 53,0 km/h-val)**

- A körív sugara Pitagorasz-tétellel határozható meg ( $R$ ;  $R-10$  m; 50 m):  $R=130$  m adódik.
- Állandó sebességű haladás esetén minden pontban ugyanakkora centripetális erő szükséges sugárirányba, amit az  $mg\cos\alpha$ -T biztosít ( $\alpha$  jelöli a sugár és a függőleges szögét). Felfelé haladva a hídon,  $\cos\alpha$  nő, mert  $\alpha$  csökken, így  $T$ -nek is nőnie kell. Ezért a hidat terhelő erő legfelül a legnagyobb, elég biztosítani, hogy itt ne legyen túl nagy a nyomóerő.
- $T$ -re felső korlát van megadva, így  $F_{cp}$ -re alsó korlát érvényes: 10 000 N. Ebből a sebesség minimuma adódik.

**.13)** Egy korcsolyázónak 73°-kal kell a vízszinteshez képest bedőlnie, hogy a 60 méter sugarú kanyarban haladhasson. (A jég által kifejtett erő a korcsolyázó testének irányába mutat!)

- a) Mekkora a korcsolyázó sebessége? **(13,54 m/s)**
- b) Mi biztosítja a centripetális erőt, ha a jég síkos? **(a jég)**
- Csak a nehézségi erő és a jég hat rá, ez utóbbi erőnek egyik komponense függőlegesen lerontja a nehézségi erőt, a vízszintes komponense biztosítja a centripetális erőt. Bár a jég „síkos”, de a korcsolya éle belevág a jégbe, ezért jöhet létre az oldalirányú erő.
- A bedőlés szöge kapcsolatot teremt a két komponens között, miközben a függőleges komponens ismert.

**.14)** Egy 5,1 kg tömegű golyót 2,4 m hosszú fonálra kötve, kúpingát készítünk úgy, hogy a golyó vízszintes síkban körmozgást végez, miközben a fonál a függőlegessel állandó  $\alpha$  szöget zár be.

- a) Mekkora ez a szög, ha a fonálerő  $60\text{ N}$ ? **(31, 8°)**
- b) Mekkora a golyó kerületi sebessége? **(2,80 m/s)**
- c) Mekkora a periódusidő? **(2,84 s)**
- d) Mekkora erőt kellene kibírnia a fonálnak elszakadás nélkül, ha harmadekkora periódusidőt szeretnénk? **(540 N)**
- e) Mekkora kerületi sebesség esetén lenne kétszer ekkora a periódusidő? **(Nem lehet!)**
- f) Adjuk meg és ábrázoljuk  $\alpha$  függvényében, a  $(0-90^\circ)$  intervallumon a kötélerőt, a periódusidőt és a kerületi sebességet.  $\left[ K = mg/\cos\alpha; T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cos\alpha}; v = \sqrt{lg\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}} \right]$
- g) Mekkora lesz a kerületi sebesség a maximális periódusidő esetén? **(0 m/s-hoz tart)**

- a) A fonálerő és  $mg$  hat a testre, eredőjük a centripetális erő. A két erő szöge egyben a fonál szöge is.
- b) A centripetális erő képletében van „elrejtve” a kerületi sebesség, a szögsebesség, és benne a periódusidő is. Csakhogy a képletben még a körpálya sugara is szerepel, ami pedig szög segítségével számolható a fonalhosszból.

**c-d)** Keressük meg a  $T$  periódusidő és a  $K$  kötélerő közvetlen összefüggését ( $mr\omega^2 = F_{cp} = K\sin\alpha = Kr/l$ ), azaz  $K = ml\omega^2$ , és  $\omega$ -ban van a  $T$ .  $K$  és  $T^2$  fordítottan arányosak.

- e) Vigyázat! A kerületi sebesség most nem arányos a periódusidővel, mert a kör  $r$  sugara is  $\alpha$ -függő! Nézzük, mi történne kétszeres periódusidő esetén? A centripetális erőt a nehézségi erőből kifejezve:  $mr(2\pi/T)^2 = F_{cp} = mg\sin\alpha$ , továbbá  $r = l\sin\alpha$ -t figyelembe véve:  $T^2 = \cos\alpha \cdot 4\pi^2 l/g$ .

Innen látható, hogy a periódusidő kétszerese esetén a  $\cos\alpha$  értéke négyszer akkora lenne. Csakhogy már az előzőekben  $\cos\alpha = 0,8488$  volt, ennek négyszerese nem képzelhető el.

- f) Az  $\alpha$  értéke meghatároz mindent. A geometriát:  $r = l\sin\alpha$ , az  $mg$  segítségével a kötélerőt és a centripetális erőt:  $K = mg/\cos\alpha$ ,  $F_{cp} = mg\sin\alpha$ . Így a centripetális erőben megtalálható periódusidőt és kerületi sebességet:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cos\alpha} \text{ és } v = \sqrt{lg\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}.$$

- g) Ebből látható, hogy a maximális periódusidő nincs is, ugyanis az  $\cos\alpha = 1$ , azaz  $\alpha = 0^\circ$  esetén nincs értelme körmozgásról beszélni. Így válasz: a periódusidő **legkisebb felső korlátja**  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 3,08\text{ s}$  (ami egyben a fonálinga lengésideje), amit akkor kapunk, ha  $\alpha$ -val  $0^\circ$ -hoz tartunk. Ekkor a kerületi sebesség értéke  $0$ -hoz tart, hiszen  $v = r\omega$  és  $\omega$  véges értékhez,  $r$  pedig a  $0$ -hoz tart.

**.15)** Egy  $0,5\text{ m}$  sugarú félgömb belsejében vízszintes síkban körbe gurul egy golyó, a gömb aljától számítva  $0,1\text{ m}$  magasságban.

- a) Mennyi idő alatt fut körbe a golyó? **(0,889 s)**
- b) Ha *kisebb* periódusidőt szeretnénk, akkor a golyót magasabban vagy alacsonyabban, kisebb vagy nagyobb sebességgel kell-e vízszintesen meglökni a félgömbben kezdetben? **(magasabban, 0,376 m; nagyobb sebességgel)**
- c) Mekkora az elérhető legnagyobb és legkisebb periódusidő? **(0 s; 1,405 s)**

- a) A feladat szinte teljesen egyezik az előzővel, csak most a fonálerő szerepét a pálya merőleges kényszerereje játssza és a fonál hossza helyett  $R$  szerepel.  $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}\cos\alpha}$  adódik.
- b) A képlet szerint kisebb  $T$ -hez kisebb  $\cos\alpha$ , ehhez nagyobb  $\alpha$ , amihez nagyobb magasság tartozik. A kerületi sebesség nagyobb, hiszen hosszabb pályán rövidebb idő alatt kell végighaladni.
- c)  $\cos\alpha$  szigorúan  $0$  és  $1$  közé esik.

**.16)** Az egyenlítő mentén épült vasútvonalon két mozdony halad ellentétes irányban, tömegeik  $25.000\text{ kg}$ -osak, sebességeik  $72\text{ km/h}$ . A Föld sugara  $6.400\text{ km}$ .

- a) A Föld forgását is figyelembe véve, melyik nyomja kisebb erővel a síneket? **(NY-ról K-re mozgó)**
- b) Mekkora ez a különbség? **(145,4 N)**

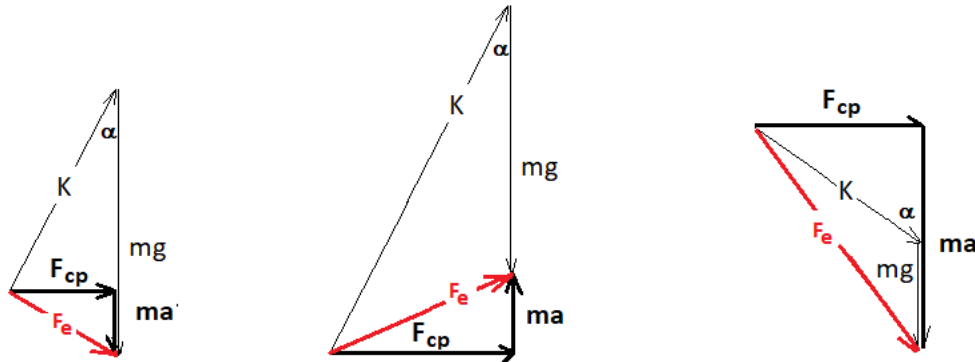
- a) Inerciarendszerből nézve a két vonat nem ugyanakkora sebességű körmozgást végez. A nagyobb sebességűhöz nagyobb (középpont felé mutató) centripetális erő és így kisebb nyomóerő tartozik.
- b) A nyomóerők különbsége a centripetális erők különbsége. Az egyik sebessége  $v_k + v_o$ , a másiké  $v_k - v_o$ , ahol  $v_k$  a sín kerületi sebessége az egyenlítőn. (A végeredményben nem szerepel a Föld sugara, csak a forgásának periódusideje.)

**.17)** Egy lefelé,  $3 \text{ m/s}^2$  gyorsulással mozgó lift mennyezetéhez rögzített  $70 \text{ cm}$  hosszú fonálra kötött golyó egyenletes közmozgást végez a liftből nézve vízszintes síkban, miközben a lefelé hajló fonál  $26^\circ$ -os szöget zár be a függőlegessel.

- Mekkora a periódusidő? **(1,88 s)**
- Mekkora legyen a lift gyorsulása, hogy a periódusidő ugyanekkora szög mellett kétszer ekkora, ill. harmadekkora legyen? **( $8,25 \text{ m/s}^2$  lefelé, ill.  $53 \text{ m/s}^2$  felfelé)**
- Mekkora az elérhető legnagyobb és legkisebb periódusidő, ha a lift gyorsulását alkalmasan megválaszthatjuk? **(bármely pozitív szám lehet)**
- Mekkora a gyorsulás nagysága és a kötélerő akkor, ha a gyorsulás iránya lefelé mutat, és  $g$ -nél nagyobb abszolútértékű, miközben a fonál a függőlegeshez  $26^\circ$ -os szögben hajlik, és a periódusidő  $2 \text{ s}$ ? **(16,21 s)**

a) Mivel a fonál állása adott, ezzel együtt a geometria is adott,  $r = l \sin \alpha$ .

A ható  $K$  és  $mg$  eredőjének most két komponense van: a vízszintes komponens a centripetális erőt, míg a függőleges az  $ma$  lefelé gyorsító erőt adja. Így az ábra szerint:



Az első ábra derékszögű háromszögéből:  $F_{cp} = (mg - ma) \sin \alpha$ . A periódusidő  $F_{cp}$ -ben van.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g-a} \cos \alpha}$

Ez a képlet  $g$ -nél kisebb (pozitív és negatív!) a gyorsulások esetén is érvényes. Amennyiben  $a$  negatív (felfelé gyorsul), akkor a vektorábra kissé módosul (2. ábra), de a fenti képletbe negatív  $a$ -t helyettesítve, helyes eredményt kapunk.

- Kétszer ekkora periódusidőhöz negyedakkora  $g-a = 7/4 \text{ m/s}^2$ , de harmadekkora periódusidőhöz 9-szer nagyobb, tehát  $63 \text{ m/s}^2 = g-a$  kell, ami már felfelé gyorsuló liftet jelent.
- $10 \text{ m/s}^2$ -hez alulról közelítő, lefelé gyorsuló lift esetén  $T$  nagyon nagy, míg felfelé, nagy gyorsulással mozgó lift esetén  $T$  nagyon kicsi pozitív szám lehet.
- A nagy lefelé gyorsulás miatt most a fonál „felfelé” hajlik (3. ábra). A periódusidő:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{a-g} \cos \alpha}$

**.18)** Egy felfelé álló,  $\alpha = 90^\circ$  nyílásszögű tölcser tengelye körül  $n = 30/\text{perc}$  fordulatszámmal forgatunk. A tölcserben van egy golyó, mely a nem túl nagy sűrűdés hatására a tölcserrel együtt mozogva körmozgást végez.

- Milyen magasan lesz a körpálya síkja a tölcser legalsó pontjától? **(1,01 m)**
- Fejezzük ki a  $h$  magasságot  $\alpha$  és  $n$  segítségével!  $\left( h = \frac{g}{4\pi^2 n^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right)$

A nehézségi erő és a felületre merőleges kényszererő eredője a vízszintes centripetális erő. Ennek kifejezésében van a fordulatszám, és a pályasugar, amely a magasságtól függ.

**.19)** Vékony csövet olyan alakra hajlítunk, mely egy  $v_0 = 20 \text{ m/s}$ -os sebességgel,  $\alpha = 60^\circ$ -ban ferdén elhajított test pályája. Ebben a csőben állandó  $v_0 = 20 \text{ m/s}$  nagyságú sebességgel végighalad egy kicsi test. Mekkora erővel nyomja a cső falát ez a kicsi test...

- ...a pálya legmagasabb pontján? **(3 mg)**
- ...a maximális magasság  $3/4$ -énél? **(0,972 mg)**
- Hol nem fejt ki erőt a pályára? **(a legelején és a legvégén)**
- Adjunk képletet az általános esetre, amikor a pálya egy  $\alpha$  szögű hajításból származik, amin a test a hajítás állandó kezdősebességével halad végig. Paraméterként használjuk azt a  $\phi$  szöveget, melyet a pálya adott pontjánál a sebesség iránya a vízszintessel bezár. Adjuk meg a nyomóerő irányát és nagyságát! **(Mindenütt a cső „felső” oldalát nyomja  $mg \cos \phi \left( 1 - \frac{\cos^2 \phi}{\cos^2 \alpha} \right)$  erővel)**

- A feladat nehézsége, hogy a pálya nem körív, hanem a hajítás parabolapályája, így a nyomóerőt úgy számoljuk, hogy a pálya adott pontjában meghatározzuk a görbületi sugarat, és egy ilyen sugarú körön történő mozgással közelítve a valót, számoljuk ki a nyomóerőt.

A pálya tetőpontján a sebesség  $v_0 \cos \alpha$ , a normális irányú gyorsuláskomponens maga a  $g$ , így a görbületi sugár:  $R = v_0^2 \cos^2 \alpha / g$ . Ha ezen a pályán  $v_0$  sebességgel halad egy test, akkor a centripetális erő  $mv_0^2/R = mg/\cos^2 \alpha = 4mg$ . Ebből a nyomóerő számolható.

- b) Az adott pont az emelkedési idő felénél van. Itt a sebességkomponensek és a teljes  $v$  sebesség is számolható a hajítás esetén. A sebességnek a vízszintessel bezárt szöge  $\phi = 40,89^\circ$ -nak adódik.  
E szöggel a gyorsulás normális komponense  $g \cos \phi$ , így a görbületi sugár:  $R = v^2 / g \cos \phi$  a pálya ezen pontjánál. A pályán egyenletes  $v_0$  sebességgel végighaladó testre e pontban  $F_{cp} = mv_0^2/R = 1,728mg$  centripetális erőnek kell hatnia, melyet a nyomóerő és az  $mg \cos \phi$  biztosít. Ebből a nyomóerő számolható.
- c) A hajítási pályán a test a kezdő- és végpontot kivéve, nagyobb sebességgel halad, mint a hajított test.  
A hajított test sehol sem nyomná a csövet, mert annak alakja a szabad mozgásának pályájával megegyező alakú. Így az egyenletesen mozgó testnek minden pályapontban túl nagy a sebessége ahhoz, hogy a pályára ne fejtessen ki erőt. Így a cső ezt mindenütt „lefelé” nyomja.
- d) A gyorsulás normális komponense  $g \cos \phi$ , a görbületi sugár  $R = v^2 / g \cos \phi$ , ahol  $v$  a hajítás ezen pontbeli sebessége.  
De a hajítás állandó  $v_0 \cos \alpha$  vízszintes sebességkomponense miatt a hajítás sebessége e pontban  $v = v_0 \cos \alpha / \cos \phi$ . Így a görbületi sugár:  $R = v_0^2 \cos^2 \alpha / g \cos^3 \phi$ .  
Ebben a pontban az állandó  $v_0$  sebességű testre  $mv_0^2/R = mg \cos^3 \phi / \cos^2 \alpha$  (centripetális) eredő erő hat, melyet a pályára merőleges  $T$  tartóerő és az  $mg \cos \phi$  erő okoz.  $T = mg \cos \phi \left( 1 - \frac{\cos^2 \phi}{\cos^2 \alpha} \right)$ . Ez mindig negatívnak adódik, azaz a  $T$  kényszererő a pályára rányomja a testet.

**.20)** Egy 2 kg tömegű kiskocsin 0,5 kg tömegű, 0,64 m hosszú inga függ. A kocsit fogva, az ingát feszes fonállal vízszintes helyzetbe hozzuk, majd a rendszert magára hagyjuk. Az inga legalsó helyzetében a kocsihoz viszonyított relatív sebessége 4 m/s. Súrlódás nincs.

- a) Inerciarendszer-e a kocsin rendszere, amikor a golyó alul van? **(igen)**  
b) Mekkora kocsihoz képesti pályájának görbületi sugara, mekkora erővel húzza a kötelet alul? **(0,64 m, 30 N)**  
c) Mekkora a golyó földről látható pályájának görbületi sugara? **(0,4096 m)**  
d) Mekkora az inga elmozdulása a kezdőhelyzettől addig, amíg a fonal ismét vízszintes lesz? **(1,024 m)**
- a) Az inga legalsó helyzetében vízszintes irányú erő nem hat a kocsira (a fonal függőleges), így az nem gyorsul az IR-nek tekinthető talajhoz képest, így a kocsihoz rögzített rendszerben a Newton-törvények érvényesek ebben a pillanatban.  
b) A rendszer vízszintesen zárt. A lendület megmarad a talajhoz képest (is), a sebességek számolhatók. A kocsihoz képest (IR!) a golyó körmozgást végez. A centripetális-, majd a fonálerő számolható.  
c) A földről nézve más a golyó látszó sebessége, de a fonálerő ugyanakkora mint a kocsihoz nézve (pl. ugyanakkora fonálmegnyúlás látszik), és a gyorsulása is, hiszen a két rendszer nem gyorsul egymáshoz képest.  
d) A rendszer vízszintesen zárt, a TPK helyben marad.

## Pontrendszer

**.21)** 0,2 kg és 0,4 kg tömegű testeket legfeljebb 6 N erőt kibíró, elhanyagolható tömegű zsinag köt össze. A kisebb tömegű testet megfogva azt függőlegesen felfelé emeljük (esetleg gyorsulva).

- a) Mekkora erővel emelhetjük, hogy a zsinag el ne szakadjon? **(legfeljebb 9N)**  
b) Mekkora lehet a gyorsulásuk? **(legfeljebb 5 m/s<sup>2</sup>)**

A kötél mindkét végénél ugyanakkora erőt fejt ki, bárhogyan is gyorsuljon a rendszer, hiszen ezen erők ellenerejei azok, amik eredője a kötelet gyorsítja. Ám a kötél tömege közelítőleg 0, így a szükséges eredő erő közelítőleg 0. ( $F_e = ma = 0 \cdot a = 0$ ). Fesztes kötél esetén a gyorsulások azonosak.

Az erők (mindkét  $K$  kötélérő,  $F$  húzóerő, nehézségi erők) berajzolása után tételezzük fel, hogy a kötél éppen az elszakadás határán áll:  $K = 6N$ .

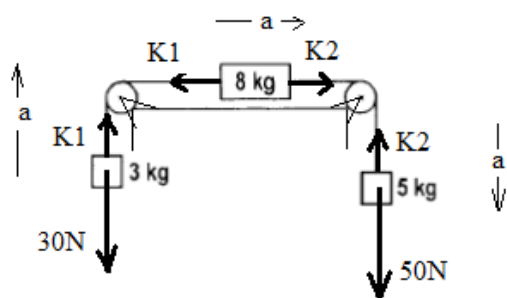
Kétszer alkalmazzuk a mozgásegyenletet: Előbb az alsó testre, innen a gyorsulás adódik, majd a felsőre, ebből a húzóerő számolható.

**.22)** Egy  $m$  tömegű majom mászik egy  $2m$  tömegű felakasztott függőleges rúdon felfelé. A rudat függesztő kötél elszakad, de ebben a pillanatban a majom a rúdon egyre gyorsabban szalad felfelé, így végül a talajtól mindig ugyanolyan távol marad. Mekkora gyorsulással mozog a rúd lefelé? ( **$15 \text{ m/s}^2$** )

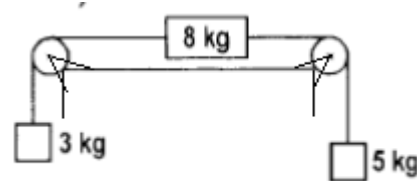
A majom áll (a földhöz rögzített inerciarendszerben), így az őt emelő, a rúd által kifejtett kényszererő éppen  $mg$ -t egyensúlyozza ki. ( $a=0$ ).

A kényszererő ellenereje és a nehézségi erő gyorsítja a rudat.

**.23)** Keressük a súrlódásmentes asztalon lévő tömegek közötti kötelerőket és a gyorsulásokat. ( **$33,75 \text{ N}$ ;  $43,75 \text{ N}$ ;  $1,25 \text{ m/s}^2$** )



Erőket rajzoljunk, majd a mozgásegyenletet írjuk fel mindhárom testre. A kötelek mindkét végükénél azonos erőt fejtenek ki ( $K_1$ ,  $K_2$ ), és az összes test gyorsulásának nagysága azonos ( $a$ ).  
Három egyenlet és három ismeretlen alkotja az egyenletrendszert.  
 $50 \text{ N} - K_2 = 5 \text{ kg} \cdot a$   
 $K_2 - K_1 = 8 \text{ kg} \cdot a$   
 $K_1 - 30 \text{ N} = 5 \text{ kg} \cdot a$

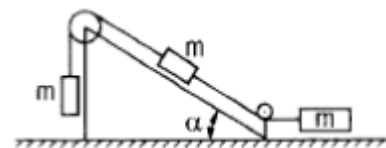


### Figyelem!

- A csiga perménél lévő kötelerőket (4 db) nem rajzoltuk meg, de azok egy csiga két oldalán azonosak, mert a csigát tömeg, és így tehetetlenségi-nyomaték nélkülinek gondoljuk, ezért ennek forgatásához nem kell forgatónyomaték, azaz az egyenlő karokon ható erők egyenlők. Így lesz pl. a 8 és 5 kg-os tömegekre ható két kötelerő azonos.
- Az asztalon lévő testre ható tartóerőt és nehézségi erőt nem tüntettük fel, mert azok irányába nincs mozgás és gyorsulás, így – bár azok egymással egyensúlyt tartanak - de a test vízszintes mozgásában nincs szerepük.
- A mozgásegyenlet felírásakor ügyeljünk arra, hogy az ábrán felvett gyorsulásirányokba mutató erőket pozitív, az ellentéteseket negatív előjellel vegyük figyelembe.
- A gyorsulás rögtön adódik, ha a 3 testet a fonalakkal egy rendszernek tekintjük, melyet 50 N gyorsít, míg 30 N lassít, miközben a rendszer össztömege 16 kg. A mozgásegyenlet szerint:  $a = 20 \text{ N} / 16 \text{ kg}$ . A fenti gondolatmenet matematikai megfelelője, hogy az előző egyenletrendszer egyenleteit összeadjuk!

**.24)** Súrlódás nincs, keressük a gyorsulást és a kötelerőket ( $m$  és  $\alpha$  paraméternek tekintendő)? [  **$g(1-\sin\alpha)/3$ ;  $mg(1-\sin\alpha)/3$ ;  $mg(2+\sin\alpha)/3$**  ]

Berajzoljuk a nehézségi- és kötelerőket és a tartóerőt. A nehézségi erőt felbontjuk lejtőre merőleges és vele párhuzamos komponensekre. Előbbi egyensúlyozza a tartóerőt, de a lejtőn való mozgást nem befolyásolja, utóbbi a lejtőn lévő testet „lefelé” húzza.



Egyenletrendszer: A 3 testre 3 mozgásegyenlet a mozgás irányába, és 3 ismeretlen:  $a$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ .

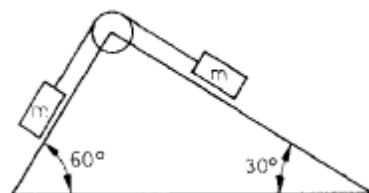
**.25)** A tömegek 5 kg-osak, súrlódás nincs, a lejtő rögzített.

- Mekkora a testek gyorsulása? ( **$1,83 \text{ m/s}^2$** )
- Mekkora erő terheli a csiga tengelyét? ( **$48,30 \text{ N}$** )

a) Ötlet1:

Bal téglára:  $T_1$ ,  $K$ ,  $mg$  erők,  $mg$  bontandó komponensekre. Hasonlóan a jobb téglánál  $T_2$ ,  $K$  és  $mg$ , ami bontandó.

Egyenletrendszerrel: Két mozgásegyenlet a két testre, két ismeretlennel ( $a$ ,  $K$ )



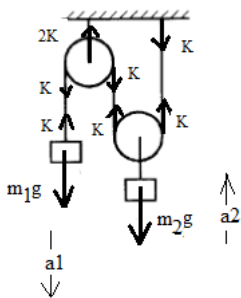
Ötlet2:

Lineáris gondolatmenettel: A rendszert „balra” gyorsítja  $mg\sin 60^\circ - mg\sin 30^\circ = mg$  erő, össztömeg pedig  $2m$ . Ebből a gyorsulás adódik.

Majd egyik testre külön alkalmazzuk a mozgásegyenletet, így  $K$  számolható.

- b) A csigánál mindkét kötélen  $K$  erő hat, mert a csiga tömeg nélküli! Ennek most a gyorsulásban nincs jelentősége, de a csiga tengelye egyensúlyozza ki ezek eredőjét, hiszen a csiga nem gyorsul. A rá ható két kötélerő egyenlő, és merőlegesek, így eredőjük  $K\sqrt{2}$ . Ekkora erőt fejt ki a tengely is, a szögfelező irányába, „kifelé”.

**.26)** A csigák és a kötelek tömege elhanyagolható, a kötelek nyújthatatlanok.  $m_1=2$  kg,  $m_2=3,5$  kg. Mekkora a kötélerők és a gyorsulások? (**18,26 N; 0,435 m/s<sup>2</sup>; 0,870 m/s<sup>2</sup>**)

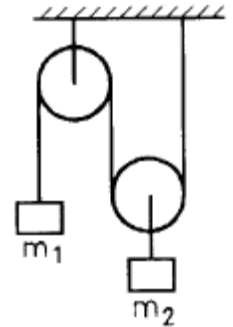


A kötéldarabok végeinél (az elhanyagolható tömeg miatt) azonosak a kötélerők, a csigák tömegének hiánya miatt a két oldalukon ugyanakkorák a kötélerők.

Vegyük fel a gyorsulásokat tetszés szerint, pl. az ábrának megfelelően. Ekkor a mozgásegyenletek:

$$m_1g - K = m_1a_1$$

$$2K - m_2g = m_2a_2, \text{ bennük 3 ismeretlen.}$$



A harmadik egyenlet a kényszerfeltétel lesz, ami a kötélnyújthatatlanságát fejezi ki. Ehhez kétféle gondolatmenettel is eljuthatunk:

- A bal kötélszár hosszabbodása az indulást követő  $\Delta t$  időtartam alatt:  $1/2a_1\Delta t^2$ , míg a másik két kötélszár mindegyike rövidül  $1/2a_2\Delta t^2$ -tel:  $1/2a_1\Delta t^2 = 1/2a_2\Delta t^2 + 1/2a_2\Delta t^2$ , azaz  $a_1 = 2a_2$  lesz a kényszert kifejező 3. egyenlet.

- Avagy: Nem csúszó kötélnél mindig igaz, hogy a csigához képest a bal kötélnyújtásvektora pontosan ellentettje a jobb kötélnyújtásvektorának, hiszen azonos idő alatti elmozdulásvektoraira ugyanez igaz.

Így, ha  $\mathbf{a}_1$  és  $\mathbf{a}_2$  illetve  $\mathbf{a}_{cs}$  jelöli az inerciarendszerhez képesti gyorsulásvektorait a bal és jobb kötélnél, illetve a csigánál, akkor  $\mathbf{a}_1(\text{csigához}) = -\mathbf{a}_2(\text{csigához})$ , azaz  $\mathbf{a}_1(\text{IRhez}) + \mathbf{a}_{IR}(\text{csigához}) = -(\mathbf{a}_2(\text{IRhez}) + \mathbf{a}_{IR}(\text{csigához}))$ , amiből  $\mathbf{a}_1(\text{IRhez}) - \mathbf{a}_{cs}(\text{IRhez}) = -(\mathbf{a}_2(\text{IRhez}) - \mathbf{a}_{cs}(\text{IRhez}))$ , tehát  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_{cs} = -(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_{cs})$ .

Ebből  $\mathbf{a}_{cs} = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)/2$  adódik vektoriálisan, minden esetben. Az ábrán felvett esetben a kötelek gyorsulásai a két oldalon felfelé  $a_1$  és  $0$ , ezek átlaga adja a csiga felfelé mutató  $a_2$  gyorsulását:  $a_2 = (a_1 + 0)/2$ , azaz  $a_1 = 2a_2$ .

### Figyelem!

- A csigák esetén a középpont (előjeles) gyorsulásvektora mindig a bal és jobb kötélszárak egy-egy pontjai (előjeles) gyorsulásvektorainak számtani közepe, ha a kötélnyújtás nem csúszik!
- A felfüggesztéseket összesen  $3K = 54,78$  N erő terheli, ami kisebb(!) a testek nyugalmi súlyainak összegénél (55 N), mert a rendszer nincs nyugalomba, a nehézségi erő hatására tömegközéppontja lefelé gyorsul.

**.27)** Egy mérlegre  $M=5$  kg-os,  $30^\circ$ -os lejtőt rögzítünk, amire egy  $m=3$  kg-os testet hagyunk lecsúszni súrlódás nélkül.

- Mekkora erővel nyomja a lejtő a mérleget a lecsúszás közben? (**72,5N**)
- Mit mutat a mérleg? (**7,25 kg**)
- Mekkora a testek tömege lecsúszás közben? (**5 kg, 3 kg**)
- Adjuk meg a mérleget nyomó erőt paraméteresen is! ( **$(M + m\cos^2\alpha)g$** )
- Mekkora legyen a lejtő hajlásszöge, hogy a mérleg 6 kg-ot mutasson? ( **$54,74^\circ$** )

- a) A test a rögzített lejtőt nyomja  $mg\cos\alpha$  erővel. Ennek függőleges komponensét és a lejtőre ható  $Mg$  erőt egyensúlyozza a mérleg átló kifejtett erő függőleges komponense.
- b) A mérleg (függőleges) erőt érzékel, de a kijelzője, skálája úgy van beállítva, hogy azt a tömeget mutatja aminek nyugalmi súlya éppen ekkora erő lenne. **Tehát a mérleg erőt mér és tömeget mutat, feltételezve, hogy az nyugalomban van.** A lecsúszó test tömege nem változik meg csúszás közben (mert a fénysebességhez képest kicsi a sebessége).

**.28)** Legyen  $m_1=3$  kg,  $m_2=2$  kg,  $m_3=1$  kg! A kötelek nyújthatatlanok, , továbbá a csigákkal együtt elhanyagolható tömegűek.

- a) Keressük a kötélérőket és a gyorsulásokat? (**14,12 N; 28,24 N;  $g/17$ ;  $5g/17$  ;  $-7g/17$**  )
- b) Fejezzük ki az állócsigát tartó kötélérőt paraméteresen! (  **$16g/(4/m_1+1/m_2+1/m_3)$**  )

Vegyük fel most az összes gyorsulást lefelé! Az állócsiga köteleiben  $K_1$ , a mozgócsigájában  $K_2$  erők hassanak.

A 3 mozgásegyenlet a 3 téglára...

$$m_1g - K_1 = m_1a_1$$

$$m_2g - K_2 = m_2a_2$$

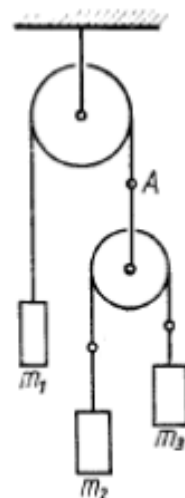
$$m_3g - K_2 = m_3a_3, \text{ amik mellé csatlakozik...}$$

$$K_1 - 2K_2 = 0, \text{ a mozgásegyenlet a mozgócsigára, (hiszen a mozgócsiga tömege 0),}$$

illetve a fonalak meg nem csúszását és nyújthatatlanságát kifejező kényszer....

$$-a_1 = (a_2 + a_3)/2, \text{ hiszen a mozgócsiga közepének gyorsulása } -a_1. \text{ (Ld. előző feladat!)}$$

Ez 5 egyenlet 5 ismeretlennel.

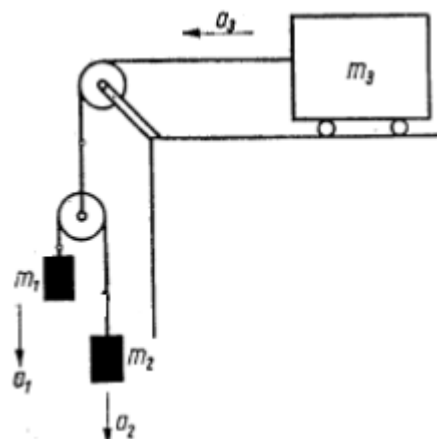


**.29)** Legyen  $m_1=6$  kg,  $m_2=2$  kg,  $m_3=19$  kg! Keressük a kötélérőket és a gyorsulásokat? (**0,62g; -0,14g; 0,24g; 22,8N; 45,6N**)

Minden gyorsulást vegyünk fel pl. az ábra szerint. A felső kötélérő duplája az alsó kötélérőnek a mozgócsiga elhanyagolható tömege miatt . (Ha ezeket eleve  $K$  és  $2K$ -val jelöljük, akkor az egyenletrendszer egyszerűbb lesz.)

$$\text{A kényszer: } a_3 = (a_1 + a_2)/2$$

Ehhez csatlakozik a három mozgásegyenlet, így 5 egyenlet lesz 5 ismeretlennel.

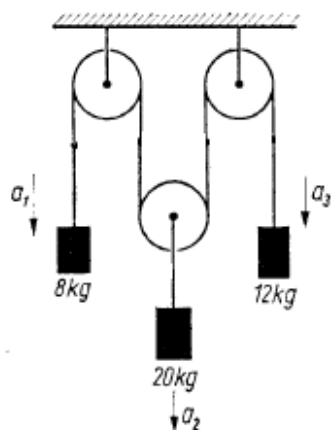


**.30)** Mekkora a gyorsulások? ( **$-11g/49$  felfelé;  $g/49$  ;  $9g/49$** )

- a) Számítsuk ki paraméteresen a kötélérőt! ( **$4g/(1/m_1+4/m_2+1/m_3)$**  )
- b) Változtassuk meg  $m_3$  értékét úgy, hogy a rendszert magára hagyva  $m_3$  mozdulatlan maradjon! (**9,23 kg**)

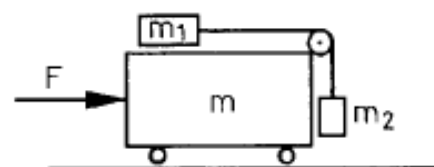
- a) Nem láthatjuk előre a gyorsulások irányát, ezért azokat az ábrán látható módon is felvehetjük. Ez esetben a kényszerfeltétel  $-a_2 = (a_1 + a_3)/2$  lesz. (Ha a szélső testek gyorsulását lefelé, a középsőt felfelé vettük volna fel, akkor a kényszer  $a_2 = (a_1 + a_3)/2$  lett volna.)

- b) Ha  $m_3$  nem gyorsul, akkor a mozgásegyenlete miatt  $K = m_3g$ . Ebből adódik  $m_3$ .



**.31)** Az ábrán sehol sincs súrlódás.

- a) Mekkora erővel kell tolni a szekeret, hogy ne mozduljanak el a téglák a szekérhez képest, ha  $m_1=1$ kg,  $m_2=2$ kg;  $m=3$ kg? ( **$F=120$  N**)
- b)  $F=150$ N esetén keressük a testek gyorsulásait! (1. tégl:  **$23,53 \text{ m/s}^2$** , a szekér:  **$25,29 \text{ m/s}^2$** , a 2. tégl:  **$25,35 \text{ m/s}^2$** , de a függőleges komponense felfelé mutat!)



- c) Keressük meg  $F$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m$  paraméterek esetén a gyorsulásokat, és a kötélrőt!
- d) Mekkora  $F$  erő esetén lesz a fent megadott tömegek mellett a 2. téglához képesti gyorsulásvektora  $g$  nagyságú? **(59,64 N tolóerő, avagy -23,64 N húzóerő esetén)**
- e) Az adott tömegek mellett előfordulhat-e balról jobbra mutató tolóerő esetén, hogy a szekér gyorsulása jobbról balra mutat? **(igen,  $F < 6,67$  N esetén)**

- a) Ha együtt mozognak, akkor a teljes rendszert vízszintesen csak az  $F$  erő gyorsítja,  $F=ma$ .  
A közös gyorsulást az 1. téglának a kötélrő okozza, miközben ugyanakkora kötélrő akadályozza meg, hogy a 2. test függőlegesen elmozduljon.

- b) A ható erők ábrája a választott gyorsulásiirányokkal.  
Az egyenletek ( $A$  a szekér gyorsulása,  $a_1$  az 1. testé,  $a_2$  és  $A$  pedig a 2. gyorsulásának két komponense):

$$T = m_1 g$$

$$K = m_1 a_1$$

$$N = m_2 A$$

$$m_2 g - K = m_2 a_2$$

$$F - N - K = m A$$

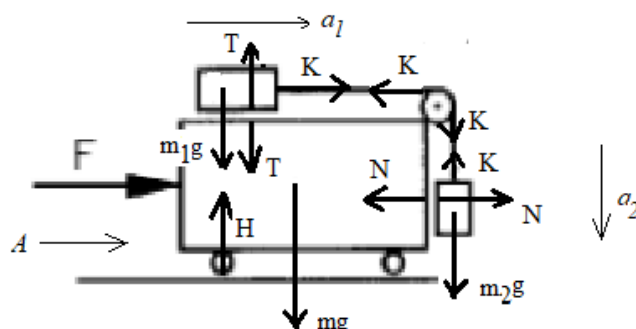
$a_1 - A = a_2$  (kényszer, a kötéll állandó hossza miatt: a kocsihoz képest a téglák gyorsulásának nagysága azonos)

$$H = mg + T + K$$

Ez 7 egyenlet 7 ismeretlennel. Ha az első és utolsó egyenletet elhagyjuk, 5 egyenlet. 5 ismeretlen marad.

- c) A megoldás paraméteresen a kért mennyiségekre:

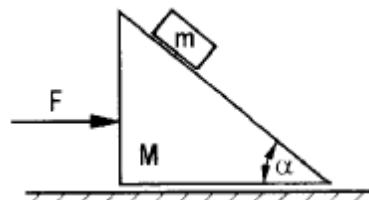
$$a_1 = \frac{F m_2 + (m_2 + m) m_2 g}{(m_1 + m_2)(m_2 + m) + m_1 m_2}, \quad A = \frac{F(m_1 + m_2) - m_1 m_2 g}{(m_1 + m_2)(m_2 + m) + m_1 m_2}, \quad a_2 = \frac{-F m_1 + (m_1 + m_2 + m) m_2 g}{(m_1 + m_2)(m_2 + m) + m_1 m_2}. \text{ A 2. test gyorsulásvektora az } a_2 \text{ és } A \text{ komponensekből rakható össze. E képletek segítenek a d-e) pontoknál.}$$



**.32)** Egy 8 kg-os, 30°-os, nem rögzített, lejtőn 2 kg-os testet magára hagyunk.

Kezdetben mindkettő állt. Súrlódás nincs.

- a) Mekkora erővel kell nyomni a lejtőt, hogy a test a lejtőhöz képest ne mozogjon, illetve mekkora ekkor a test és a lejtő közötti erő, ill. a talajra ható erő? **(57,74N; 23,09N; 100N)**
- b) Számoljuk ki az erőket és a gyorsulásokat, ha a lejtőt  $F$  erő tolja, a testek tömege pedig  $M$  és  $m$  az ábra szerint. (paraméter!), majd ennek segítségével válaszoljunk az előző és az alábbi kérdésekre is!

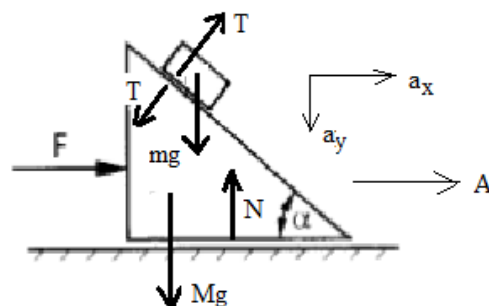


$$[ \text{A kis test: } a_x = \frac{F + \sqrt{3} M g}{4M + m}, \quad a_y = \frac{(M + m) g - \sqrt{3} F}{4M + m}, \text{ a lejtő: } A = \frac{4F - \sqrt{3} m g}{4M + m}, \text{ egymást nyomják } T = \frac{2m}{4M + m} (F + \sqrt{3} M g) \text{ erővel, a talaj tartóereje } N = M g + \frac{\sqrt{3}}{2} T ]$$

- c) Legyen most  $F=0$  N. Mekkora a gyorsulások a talajhoz képest? **(1,02 m/s<sup>2</sup> lejtőé balra; 5,03 m/s<sup>2</sup>)**
- d) Mekkora  $F$  erő esetén nem mozdul el a lejtő a talajon? **(8,66 N)**
- e) Mekkora legyen  $F$ , hogy a kicsi test  $mg$  erővel nyomja a lejtőt? **(31,44 N)**
- f) Legfeljebb mekkora lehet a kis testnek a maximális, lejtőhöz képesti gyorsulása lefelé csúszáskor, illetve mekkora  $F$  oldalirányú erő esetén valósul ez meg? **(20 m/s<sup>2</sup>, -138,56N)**

- a) Lineárisan gondolkodva: Ha együtt mozognak, egy testnek gondolva őket, az  $F$  erő a közös  $a$  gyorsulást egyértelműen meghatározza.  
Ugyanezt a gyorsulást a kis testnek a  $T$  nyomóerő vízszintes komponense okozza, míg a függőleges komponense a nehézségi erővel tart egyensúlyt, hiszen függőlegesen nincs gyorsulás. Visszafelé haladva  $T$ ,  $a$ ,  $F$  számolható.

- b) Az erők és a felvett gyorsulások (kicsi test:  $a_x$ ,  $a_y$ , lejtő  $A$ ):



Az egyenletek:

$$T \sin \alpha = m a_x$$

$$mg - T \cos \alpha = m a_y$$

$$F - T \sin \alpha = m A$$

$$N = Mg + T \cos \alpha$$

Továbbá a kényszer kifejezi, hogy a kis testnek a lejtőn

marad, azaz gyorsulása a lejtőhöz képest a szöget zár be a vízszintessel, tehát  $\tan \alpha = \frac{a_y}{a_x - A}$

Ez 5 egyenlet 5 ismeretlennel, könnyen megoldható,  $\alpha = 30^\circ$  nevezetes szög mellett. Ötletek:

- Az  $N$ -et tartalmazó egyenletet elhagyva, 4 egyenlet, 4 ismeretlen lesz csak.
- A kényszer kezelése egyszerűbb, ha még bevezetjük a test és a lejtő relatív gyorsulásának nagyságát ( $a$ , lefelé) és a fenti kényszeregyenlet helyett két egyszerűbb, másikat használunk:  $a \sin \alpha = a_y$  és  $a \cos \alpha = a_x - A$ , azaz

$$a_y = \frac{a}{2} \quad \text{és}$$

$$a \frac{\sqrt{3}}{2} = a_x - A$$

A megoldások: A kicsi testre:  $a_x = \frac{F + \sqrt{3}Mg}{4M + m}$ ,  $a_y = \frac{(M + m)g - \sqrt{3}F}{4M + m}$ , a lejtőre:  $A = \frac{4F - \sqrt{3}mg}{4M + m}$ , egymást

nyomják  $T = \frac{2m}{4M + m} (F + \sqrt{3}Mg)$  erővel, a talaj tartóereje  $N = Mg + \frac{\sqrt{3}}{2}T$ . Ezek alapján a további kérdések egyszerűen megválaszolhatóak.

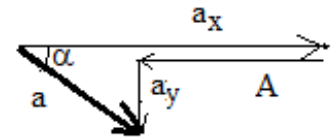
c)  $F = 0 \text{ N}$

d)  $A = 0$

e)  $T = mg$

- f) Az a relatív gyorsulásnak kell maximális (pozitív) nagyságúnak lennie. Ez  $F$ -nek szig. mon. csökkenő függvénye ( $a = 2a_y$ ), tehát  $F$  legyen minimális!  $F$  lehet negatív is (balra húzó erő), de ügyelnünk kell arra, hogy a test a lejtőn maradjon, azaz  $T$  nemnegatív legyen.  $T$  minimuma 0, ebből adódik  $a$  maximuma.

$$\mathbf{a}_{\text{test(lejtőhöz)}} = \mathbf{a}_{\text{test(földhöz)}} + \mathbf{a}_{\text{föld(lejtőhöz)}}$$



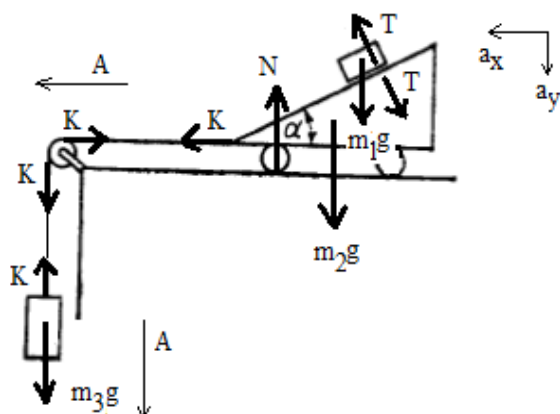
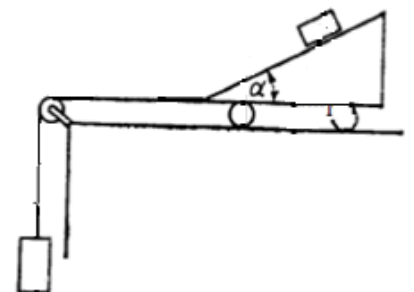
**.33)** Súrlódás nincs. Számoljuk ki  $\alpha = 30^\circ$  esetén a gyorsulásokat, a lejtő és a test közötti nyomóerőt és a kötélerőt...

a) ....  $m_1 = 4 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 6 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 3 \text{ kg}$  esetén. ( $5,04 \text{ m/s}^2$ ;  $1,27 \text{ m/s}^2$ ;  $1,27 \text{ m/s}^2$ ;  $26,20 \text{ N}$ )

b) ...általában, paraméteresen.

c) Milyen tömegviszonyok esetén nem mozog  $m_1$  a lejtőhöz képest? ( $m_3$  az össztömeg 57,7%-a legyen)

d) Milyen tömegviszonyok esetén áll a lejtő? ( $m_3/m_1 = 0,433$ )



a) Az erők és a felvett (asztalhoz képesti) gyorsulások :

Az egyenletek:

$$N = m_2g + T \cos \alpha$$

$$m_3g - K = m_3A$$

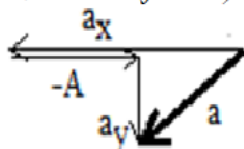
$$K - T \sin \alpha = m_2A$$

$$m_1g - T \cos \alpha = m_1a_y$$

$$T \sin \alpha = m_1a_x$$

Ha a kényszert  $a_y / (a_x - A) = \tan \alpha$  módon írjuk fel, akkor 6 egyenlet, 6 ismeretlen.

$$\vec{a}_{\text{test(lejtőhöz)}} = \vec{a}_{\text{test(földhöz)}} + \vec{a}_{\text{föld(lejtőhöz)}}$$



Célszerű először figyelmen kívül hagyni az első egyenletet (5 egyenlet, 5 ismeretlen). Továbbá célszerű esetleg a kényszeregyenlet helyett az  $a_y = a \sin \alpha$  ill. az  $a_x = a \cos \alpha + A$  egyenleteket használni, miközben az  $a$ , a test lejtőhöz viszonyított gyorsulásának nagysága is ismeretlenként jelenik meg. (6 egyenlet, 6 ismeretlen).

b) A megoldások:  $a_x = \frac{\sqrt{3}m_2 + (\sqrt{3}+1)m_3}{m_1 + 4m_2 + 4m_3} g$ ,  $a_y = \frac{m_1 + m_2 + (1-\sqrt{3})m_3}{m_1 + 4m_2 + 4m_3} g$ ,  $a = \frac{2m_1 + 2m_2 + 2(1-\sqrt{3})m_3}{m_1 + 4m_2 + 4m_3} g$ ,  
 $A = \frac{-\sqrt{3}m_1 + 4m_3}{m_1 + 4m_2 + 4m_3} g$ ,  $T = m_1 g \frac{2\sqrt{3}m_2 + 2(\sqrt{3}+1)m_3}{m_1 + 4m_2 + 4m_3}$ ,  $K = m_3 g \frac{(\sqrt{3}+1)m_1 + 4m_2}{m_1 + 4m_2 + 4m_3}$

- c)  $a=0$   
d)  $A=0$

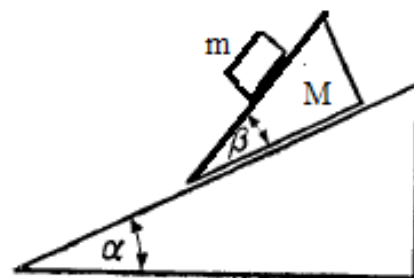
**.34)** Súrlódás nincs, a nagy lejtő rögzített.  $\alpha=30^\circ$ ,  $\beta=30^\circ$ ,  $\lambda=m_1/m_2=0,25$

- a) \*Mekkora a gyorsulások? (**8,90 m/s<sup>2</sup>**; **4,12 m/s<sup>2</sup>**)  
b) \*Mekkora a csúszó lejtő alsó és felső lapjánál fellépő nyomóerők aránya? ( $10/\sqrt{3}$ )

- c) \*Oldjuk meg paraméteresen!  $a_x = \frac{3\sqrt{3}}{2(4+\lambda)} g$ ;  $a_y = \frac{5+2\lambda}{2(4+\lambda)} g$ ;

$$A_x = \frac{\sqrt{3}(2-\lambda)}{2(4+\lambda)} g \quad A_y = \frac{2-\lambda}{2(4+\lambda)} g \quad T = \frac{2\sqrt{3}(m_1+m_2)g}{4+\lambda}; \quad N = \frac{3m_1g}{4+\lambda}$$

- d) \*Milyen  $\lambda$  esetén nem mozog  $m_1$  a lejtőhöz képest?  
e) Milyen  $\lambda$  esetén áll a kicsi lejtő?

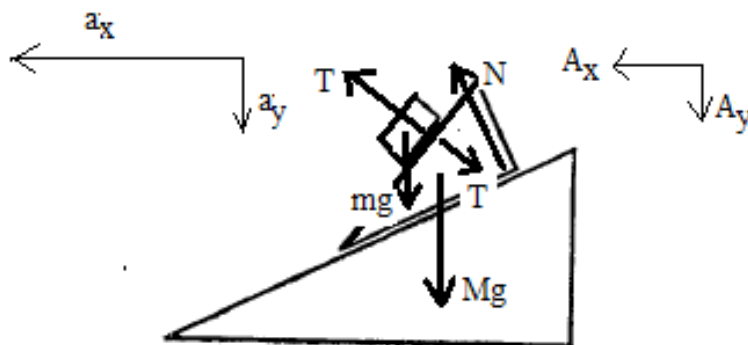


- a) A ható erők és a felvett gyorsulások komponensei:  
b) A mozgásegyenletek komponensekben:

- i)  $T \sin(\alpha+\beta) = m a_x$   
ii)  $mg - T \cos(\alpha+\beta) = m a_y$   
iii)  $N \sin \alpha - T \sin(\alpha+\beta) = M a_x$   
iv)  $Mg - N \cos \alpha + T \cos(\alpha+\beta) = M a_y$

- c) Szükséges még két egyenlet az ismeretlenek mellé ( $a_x$ ,  $a_y$ ,  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $T$ ,  $N$ ), melyek azt fejezik ki, hogy a csúszó lejtő gyorsulása ( $A_x$ ,  $A_y$ ) a talajjal  $\alpha$ , míg a téglá gyorsulása a talajjal  $\alpha+\beta$  szöget zár be.

- d) A kényszeregyenletek:  $A_y = a_x \tan \alpha$  illetve  $a_x - A_x = (a_y - A_y) \tan(\alpha+\beta)$

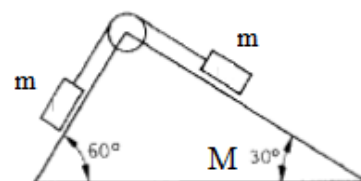


A feladat által megadott konkrét szögeket ( $\alpha = \beta = 30^\circ$ ) az eredeti egyenletrendszerbe beírva, a megoldás sokkal könnyebb.

Általános megoldása komoly, később tanult trigonometrikus összefüggéseket igényel, érettségi előtt állóknak ajánlott.

**.35)** Az  $M$  tömegű ék a vízszintes asztalon, illetve az  $m$  tömegű téglák az éken súrlódás nélkül mozoghatnak, miután a rendszert magára hagyjuk az ábra szerinti helyzetben.

- a) Adjuk meg az ék és a téglák földhöz viszonyított gyorsulásait és a kötélerőt, ha  $m=M=5 \text{ kg}$ . (**ék 1,209 m/s<sup>2</sup>**; **téglák 2,303 m/s<sup>2</sup>**; **1,719 m/s<sup>2</sup>**; **kötélerő 33,04 N**)  
b) Létezik-e olyan  $\lambda=M/m$  tömegarány, aminél a bal oldali téglá vízszintesen nem gyorsul az asztalhoz képest? (**igen,  $\lambda = \sqrt{3} - 1$** )  
c) Milyen határok közé eshet az ék gyorsulása, továbbá a tégláknak az ékhez képesti gyorsulása, illetve a kötélerő és a nyomóerők, ha a tömegarányt alkalmasan választjuk  $\lambda \in (0; \infty)$  intervallumból? (**ék  $A \in (0; 2,343 \frac{m}{s^2})$** ; **a téglák relatív gyorsulása az ékhez lépest:  $a \in (1,830 \frac{m}{s^2}; 2,656 \frac{m}{s^2})$  mindkettő csökkenő függvénye  $\lambda$ -nak.**)



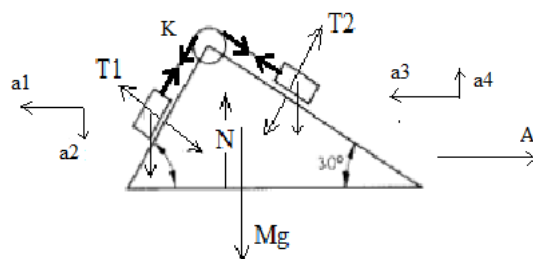
d) A kötélrőt, a bal- és jobboldali nyomóerőt.

$$[K \in (0,640mg; 0,683mg) \quad T_1 \in (0,297mg; 0,500mg, \quad T_2 \in (0,866mg; 0,983mg)]$$

$K$  és  $T_1$  növekvő,  $T_2$  csökkenő függvénye  $\lambda$ -nak]

.a) Rajzoljuk be a ható erőket: nehézségi erők ( $mg$ ,  $mg$ ,  $Mg$ ), két nyomóerő a lejtő lapjainál ( $T_1$  a bal-,  $T_2$  a jobb testre) és az ellenerejeik, négy kötélrőt ( $K$ ), minkét kötélrődarab mindkét végénél, továbbá az asztal tartóereje ( $N$ ).

Mivel a mozgás bonyolult lesz, ezért két főirányként bontsuk az erőket - szokásonktól eltérően- vízszintes és függőleges összetevőkre, miközben a bal és jobb test vízszintes és függőleges irányú gyorsulásainak nagyságát ill. az ék vízszintes gyorsulásait  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $A$ -val jelöljük és irányukat az ábra szerint választjuk.



9 ismeretlenünk van:  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $A$ ;  $K$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $N$ . Felírhatunk 6 db egyenletet, mindhárom testnél mindkét irányban alkalmazva a dinamika alaptörvényét:

$$.(1): \quad \frac{\sqrt{3}}{2}T_1 - \frac{1}{2}K = ma_1$$

$$.(2): \quad mg - \frac{1}{2}T_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}K = ma_2$$

$$.(3): \quad \frac{\sqrt{3}}{2}K - \frac{1}{2}T_2 = ma_3$$

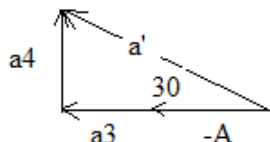
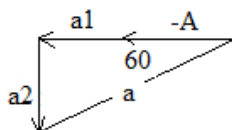
$$.(4): \quad -mg + \frac{\sqrt{3}}{2}T_2 + \frac{1}{2}K = ma_4$$

$$.(5): \quad \frac{\sqrt{3}}{2}K - \frac{1}{2}K + \frac{\sqrt{3}}{2}T_1 - \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}T_2 = MA$$

$$.(6): \quad Mg + \frac{\sqrt{3}}{2}K + \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}T_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}T_2 - N = 0$$

Szükséges még 3 egyenlet, amit a **kényszerfeltételekből** nyerünk:

A bal testnek a lejtőhöz képesti gyorsulása ( $a$ ) a talajjal 30 fokos szöget zár be:  $\frac{a_2}{a_1 + A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , ugyanis az 1. számú téglá gyorsulása a lejtőhöz képest:  $\mathbf{a_1(lejtőhöz)} = \mathbf{a_1(talajhoz)} + \mathbf{a_{talaj(lejtőhöz)}} = \mathbf{a_1(talajhoz)} - \mathbf{a_{lejtő(talajhoz)}} = \mathbf{a_1 - A}$



Hasonló megfontolással a jobb oldali testre  $\frac{a_4}{a_3 + A} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Mi lesz a 9. egyenlet? Azt fejezi ki, hogy a kötel végig feszes marad, és hossza állandó, avagy másképpen: a lejtőhöz képesti elmozdulása a két testnek azonos nagyságú bármely időtartam alatt. Mivel indulástól számítva ez utóbbi elmozdulások nagyságai  $1/2a\Delta t^2 = 1/2a'\Delta t^2$ , ezért  $a = a'$ . Az utolsó egyenlet tehát arról szólna, hogy a fenti két derékszögű háromszög átfogói egyenlők. Ez azonban a Pitagorasz-tétel miatt az  $a_i$  ismeretlenek második hatványait hozná be, jelentős matematikai nehézségeket okozva.

A célszerű megoldás: Az  $a$  nem szerepel az előző egyenletrendszerünkben ismeretlenként. Vegyük hozzá ezt is ismeretlenként, és akkor összesen 10 ismeretlen lesz. Dobjuk el fent elített két kényszeregyenletet és helyettük az eredeti (1)-(6) egyenletek mellé - ugyancsak a kényszereket kifejező - 4 újabb egyenlet csatlakozik:

$$.(7): \quad a_1 + A = \frac{1}{2}a$$

$$.(8): \quad a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$.(9): \quad a_3 + A = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$.(10): \quad a_4 = \frac{1}{2}a.$$

Az egyenletrendszer odafigyeléssel könnyen megoldható. (Az  $N$  ismeretlen csupán egyik egyenletben szerepel. Hagyjuk el ezt az egyenletet, így 9 ismeretlenre 9 egyenlet marad, a végén majd az elhagyottból kiszámoljuk  $N$ -et!)

A megoldások (használva az  $M/m=\lambda$  jelölést):

$$A = \frac{g}{6 - \sqrt{3} + 4\lambda} = \frac{g}{4} \cdot \frac{1}{1,067 + \lambda}$$

$$a = (\sqrt{3} - 1) \frac{g}{4} \cdot \frac{2 + \lambda}{1,067 + \lambda} = 1,830 \cdot \frac{2 + \lambda}{1,067 + \lambda}$$

$$T_1 = \frac{mg}{4} \cdot \frac{1,268 + 2\lambda}{1,067 + \lambda}$$

$$T_2 = \frac{mg}{4} \cdot \frac{4,196 + 3,464\lambda}{1,067 + \lambda}$$

$$K = \frac{mg}{4} \cdot 2,732 \cdot \frac{1+\lambda}{1,067+\lambda}.$$

Ezekből (7)-(10) egyenletek segítségével számolható  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , majd Pitagorasz-tétellel a két téglá gyorsulásának nagysága is.

**.b)** A bal téglá akkor nem gyorsul az asztalhoz képest vízszintesen, ha  $a_1=0$  meg tud valósulni, azaz (7) szerint  $A = \frac{1}{2}a$ . Ebből  $\lambda$  számolható.

**.c-d)** Az intervallumokbeli monotonitás meghatározásához segít, ha az  $\frac{a+\lambda}{b+\lambda}$  típusú törtet átalakítjuk  $\frac{b+\lambda+a-b}{b+\lambda} = 1 + \frac{a-b}{b+\lambda}$  módon (a, b valós számok,  $\lambda$  a változó), mert ekkor  $a-b$  előjelétől függően fog monoton nőni vagy csökkenni.