

3-Lendület

.1) A 4 m hosszú, a vízhez képest álló csónak egyik végéből a másik végébe átmegy egy 80 kg-os ember. A csónak 240 kg tömegű.

- a) Áthaladás után mennyit mozdult el a csónak és az ember a vízhez képest? **(1m; 3m)**
- b) Függ-e a fenti kérdésre adott válasz attól, hogy az ember egyenletes, avagy változó mozgással haladt? **(nem)**

Ötlet1:

A mozgás során a lendület megmarad, végig 0 lesz.

Így bármely pillanatban a vízhez viszonyított lendületeik nagysága azonos, így....

... vízhez képesti sebességeik nagysága 3:1 lesz minden pillanatban.

Ezért bármely kicsi Δt időtartam alatti (miközben a sebesség változatlanak tekinthető) elmozdulásuk aránya 3:1.

Vízhez képesti elmozdulásaik összege 4 m, amit a fenti arányban kell felosztani.

Ötlet2:

A külső vízszintes erők hiánya miatt a rendszer tömegközéppontjának mozgása nem változik, azaz helyben marad.

Kezdetben, és a végén a tömegközéppont az embertől 3 m-re van, a csónak közepe felé mérve. E pont helyben marad.

.2) Egy kocsi és a rajta utazó ember összesen $M = 90$ kg tömegűek, sebességük $v = 10$ m/s. Az ember magával visz két, egyenként $m = 9$ kg tömegű téglát is. Az ember a téglákat a kocsihoz (a kocsi kidobást követő sebességéhez) képest $u = 20$ m/s sebességgel fogja kidobni. Mekkora lesz a kocsi sebessége a téglák kidobása után, ha...

- c) ...egyszerre dobja ki mindkét téglát, az egyiket előre, a másikat hátra. **(10 m/s)**
- d) ...először egyiket előre, majd a másikat hátra dobja. **(10,15 m/s)**
- e) ...először egyiket hátra, majd a másikat előre dobja? **(9,85 m/s)**
- f) Mekkora legyen az M/m tömegarány, hogy a téglákat megfelelő sorrendbe kidobva, a sebességnövekedés 0,05u legyen? **(3)**

a) A lendület (talajhoz képest) megmarad:..

$(M+2m)v$ formából $m(V+u) + MV + m(V-u)$ formába alakul, ahol V a kocsi végső sebessége.

b) Előbb előre hajít: A lendület $(M+2m)v$ volt, majd $(m+M)V_1 + m(V_1+u)$ lett. Ebből V_1 a kezdetinél kisebbnek adódik.

Ezután hátrafelé hajít: $(m+M)V_1$ alakul $MV_2 + m(V_2-u)$ formába.

Először $-1/12u$, majd $+1/11u$ a sebességváltozás.

c) Az eljárás a fentihez hasonló. Formálisan a fenti eljárásban u helyett $-u$ írandó.

d) Előbb előre, majd hátrafelé kell dobni, ez utóbbi esetben nagyobb a sebességváltozás, hiszen kisebb volt a kidobást megelőző tömeg. Paraméteresen számolva, a sebességnövekedés a két részletben együtt $\Delta v =$

$$\frac{m^2}{(M+2m)(M+m)} u \text{ lesz.}$$

.3) Egy M tömegű kocsiból, mely kezdetben állt, egy kilövőszerkezet minden másodpercben m tömeget dob hátrafelé, a kocsihoz (annak kidobás utáni sebességéhez) képest u sebességgel. Legyen $M = 12m$. A talajon nincs súrlódás.

- a) Hányadiknak kidobott tömeg lesz az, mely megközelítőleg függőlegesen fog a talajra esni? **(8)**
- b) Mekkora lesz a kocsi sebessége ekkor pontosan? **(1,02u)**
- c) A kidobálás addig folytatódik, amíg a kocsi végül csak m tömegű marad. Mekkora lesz ekkor a sebessége? **(2,10u)**
- d) *Vajon a kezdeti M/m arány növelésével bármilyen nagy sebességre fel tudna gyorsulni a kocsi? **(igen)**

a) Az esik a talajra függőlegesen, amelyik a talajhoz képest 0 sebességgel repült el, azaz aminek a kidobása után a kocsi sebessége a talajhoz képest u nagyságú lesz.

Ha éppen az k -adik tömeget dobjuk ki, akkor a lendület előtte $[M-(k-1)m]v$, míg utána $[M-km]V+m(V-u)$. Az adódó sebességváltozás: $V-v=u/(13-k)$.

Az $1/12+1/11+\dots+1/(13-k)$ összeget annyi tagig kell kiszámolni, amíg összege 1 nem lesz.

b) Az összeg pontosan sosem lesz 1, a hozzá legközelebbi érték 1,02.

c) 11-szer dobunk, az utolsó tag $1/2$.

d) Az a kérdés, hogy az $1/2+1/3+1/4+\dots+1/n$ összeg nőhet-e minden határon túl, ha n elég nagy.

Matematikai segítség: Nézzük csak az azokat az tagokat, amik nevezője két szomszédos kettőhatvány közé esik! A $:1/(2^k+1) + 1/(2^{k+1}+2) + \dots + 1/(2^{k+1})$ részletösszeg minden tagját megbecsülhetjük alulról az $1/2^{k+1}$ -vel. Így a tekintett, 2^k db taggal rendelkező összeget alulról becsli a $2^k \cdot 1/2^{k+1} = 1/2$.

Elegendően nagy n -re elég sok ilyen $\frac{1}{2}$ -es összeg lesz a sorban, így az összeg bármilyen nagy tud lenni.

.4) 20 m magas oszlopon 0,5 kg tömegű golyó áll. Ezt vízszintesen átlövi egy 25g-os kis lövedék. A golyó az oszlop aljától 3 m-re, a lövedék 16 m-re esett le. Mekkora volt a lövedék sebessége? Számoljunk $g=10 \text{ m/s}^2$ -tel. **(38,0 m/s)**

Ötlet1:

Az ütközés utáni vízszintes hajítások ideje a magasságból megkapható.

Az időből a távolság segítségével a kezdősebességek adódnak.

Az ütközésben a lendület megmarad.

Ötlet2:

A rendszer vízszintesen zárt, így a *tömegközéppont sebessége* vízszintesen nem változik.

A 20 m magasról való esés ideje számolható (2 s).

Ezalatt a TKP az oszloptól $x_{TKP} = \frac{25g \cdot 16m + 500g \cdot 3m}{525g} = \frac{76}{21}m$ távolra került, így sebessége $\frac{38}{21} \frac{m}{s}$.

Az ütközés előtt a TKP sebessége $v_{TKP} = \frac{25g \cdot v_o + 500g \cdot 0}{525g}$, ami egyenlő az előzővel.

.5) 20 kg tömegű, 10 m/s sebességű kiskocsira, 30°-os lejtőről, szemből 5 m/s sebességű, 10 kg tömegű láda csúszik rá, és rajta is marad. Súrlódás csak a kocsi és a láda között van.

a) Mekkora lesz a közös sebességük? **(5,22 m/s)**

b) A csúszás alatt a gyorsulások nem voltak állandóak. A csúszás 0,2 s ideig tartott, miközben a láda a kocsin 3m-t csúszott hátrafelé. Mekkora a testek elmozdulása a csúszás időtartama alatt a földhöz képest? **(2,05 m; 0,95 m)**

a) A rendszer vízszintesen zárt, függőlegesen nem, így a lendület vízszintesen megmarad, függőlegesen nem.

b) A csúszás folyamata egy „lassú” ütközési folyamat, miközben a testek relatív sebessége 0-vá válik. A tömegközéppont sebessége állandó marad (vízszintesen zárt rendszer), így a hozzá rögzített vonatkoztatási rendszer inerciarendszer, benne is állandó marad a lendület.

Ám a folyamat végén e tömegközépponti rendszerben az összlendület 0, így a csúszás alatt is az volt. Tehát a tömegközépponti rendszerben a csúszás alatt bármely pillanatban ugyanakkora nagyságúak és ellentétesek a testek lendületei, ...

...azaz sebességeik aránya 1:2 minden pillanatban, függetlenül attól, hogy a sebességváltozások egyenletesek-e.

Így a tömegközépponti rendszerben a testek elmozdulásainak aránya is 1:2, azaz 1 m a kocsié és 2 m a ládáé.

A csúszás alatt azonban a tömegközéppont a földhöz képest elmozdult, 0,2 s alatt 5,22 m/s sebességgel.

.6) Az m tömegű ember v sebességgel halad (fut, csúszik) súrlódásmentes jégen, majd felugrik egy előtte álló M tömegű hosszú kocsi hátuljára. Amikor a rajta való utazást megunta, a kocsi elejére sétál, és onnan előre rugaszkodva leugrik úgy, hogy a jéghez képest a sebessége ismét v lesz. A jégen semmiféle súrlódás nincs. Mekkora most a kocsi sebessége? **(0)**

A rendszer vízszintesen zárt.

Az ember lendülete kezdetben és a végén is ugyanakkora a jéghez (IR) képest.

Ütközések

.7)

a) Mutassuk meg, hogy *bármely két test* ütközésének folyamatában, tetszőlegesen kiválasztva annak két szakaszát, az egyes testek e két szakaszban nyert *sebességváltozás-vektorai nagyságának* arányai mindkét testre ugyanazok.

b) Két test *centrális* ütközésénél nevezzük az ütközés *első szakaszának* azt, amíg a testek relatív sebessége 0-vá válik, *második szakaszának* pedig azt, ami ezután történik. A testek sebességvektorai így (a centrális egyik irányát pozitívnak választva) előjeles számokkal adhatók meg.

Mutassuk meg, hogy az ütközés második és első szakaszában szerzett *sebességváltozás-vektorok* (mint *előjeles számok*) *hányadosa* ugyanaz a pozitív szám mindkét testre.

- a) Bármely két test ütközésekor a rendszer lendülete megmarad, azaz a testek lendületváltozás-vektorai ellentétesek és azonos nagyságúak. Ha a tömegek állandóak, akkor a két test sebességváltozás-vektorai ellentétesek, és nagyságuk a tömegekkel fordítottan arányos. Mindez nem csak a teljes ütközésre, hanem annak bármelyik kis részletére is igaz. Ezért bárhogyan választunk ki két időtartamot az ütközéseken belül, az ezek alatt mért sebességváltozás-vektorok nagyságára az első szakaszban $\frac{|\Delta v_1'|}{|\Delta v_2'|} = -\frac{m_2}{m_1}$, illetve a második szakaszban: $\frac{|\Delta v_1|}{|\Delta v_2|} = -\frac{m_2}{m_1}$ amikből osztás után: $\frac{|\Delta v_1'|}{|\Delta v_1|} = \frac{|\Delta v_2'|}{|\Delta v_2|}$.
- b) Az előző kérdés gondolatmenete alapján (a ' a második szakaszra utal) a második szakaszban $\frac{\Delta v_1'}{\Delta v_2'} = -\frac{m_2}{m_1}$, illetve az első szakaszban: $\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = -\frac{m_2}{m_1}$. Emiatt $\frac{\Delta v_1'}{\Delta v_1} = \frac{\Delta v_2'}{\Delta v_2} = k = \text{állandó}$.

A tömegközéppont sebessége nem változik a lendület állandósága miatt, így a hozzá rögzített (tömegközépponti rendszer) inerciarendszer, azaz a lendület ebben is megmarad.

Benne azonban a testek relatív sebességének eltűnésekor az összlendület 0, így eredetileg is, és az ütközés bármely pillanatában is. E rendszerben az első és második szakasz fordulóján a testek ellentétes irányból közeledve, 0-ra csökkenő sebességgel találkoznak össze a tömegközéppontban.

Mivel a *testek egymáson át nem haladhatnak*, ezért (tömegközépponti rendszerből nézve) a második szakaszban sebességeik nem lehetnek azonos irányúak az első szakaszbelivel, így vagy mindkettőjük sebessége 0 marad (és együtt maradnak a tömegközéppontban), avagy az első szakaszban meglévő sebességeikkel *ellentétes irányú* sebességet nyernek a második szakaszban. Ez esetben azonban sebességvektoraik nagysága lecsökkent, majd ellentétes irányba megnőtt. Emiatt *a két szakaszban ugyanolyan előjelű (irányú) sebességváltozásra* tettek szert. Így $\Delta v_1'$ és Δv_1 azonos előjelű a tömegközépponti rendszerben.

Ámde a sebességváltozás vektorok a földhöz rögzített rendszerben is pontosan ugyanazok mit a tömegközéppontban, azaz $k = \Delta v_1' / \Delta v_1$ pozitív.

Definíció: Két test centrális ütközésekor **ütközési számnak** nevezzük azt a k számot, ami megmutatja, hogy az ütközés *első szakaszában elszenvedett sebességváltozásnak hány-szorosát nyeri még a test az ütközés második szakaszában*. A két ütközési szakaszt az a pillanat választja el, amikor a testek sebessége azonos.

Röviden: $k = \Delta v_{2,\text{szak}} / \Delta v_{1,\text{szak}}$.

A $k=0$ eset neve: *tökéletesen rugalmatlan* ütközés, a $k=1$ eset neve *tökéletesen rugalmas* ütközés.

.8) Mutassuk meg, hogy két test centrális ütközésekor az ütközési szám ellentettje megadja a testek *ütközés utáni és előtti relatív sebességnek arányát* is, azaz $k = -v_{\text{rel.}}^{\text{utána}} / v_{\text{rel.}}^{\text{előtte}}$.

$$v_1' - v_2' = [v_0 + k(v_0 - v_1)] - [v_0 + k(v_0 - v_2)] = -k(v_1 - v_2)$$

Definíció: Egy test **mozgási energiáján** értjük a $E_{\text{mozg}} = \frac{1}{2}mv^2$ mennyiséget. (Mértékegységének neve joule: J)

.9)

- a) Mutassuk meg, hogy két test *centrális ütközésekor*, ha az ütközési szám $k=1$, akkor az ütközés során megmarad a rendszer tagjaira számolt $\frac{1}{2}m_i v_i^2$ mozgási energiák összege.
- b) Mutassuk meg, hogy két test *centrális ütközésekor*, amennyiben a rendszer tagjaira számolt $\frac{1}{2}m_i v_i^2$ mozgási energiák összege megmarad, akkor az ütközési szám $k=1$.
- a) Az $E' = \frac{1}{2}m_1(v_1')^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2')^2$ összegbe helyettesítsük a $k=1$ -et kifejező $v_i' = v_0 + k(v_0 - v_i)$ összefüggést, ahol $v_0 = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2)$.
- b) Az $\frac{1}{2}m_1(v_1')^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2')^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$ egyenletbe helyettesítsük $v_i' = v_0 + k(v_0 - v_i)$ összefüggést, ahol $v_0 = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2)$. Ebből $(1-k^2)(v_1 - v_2)^2 m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = 0$ adódik. Ebből csak egyik tényező lehet 0, ha valóban ütközés történt.

Látható, hogy *centrális ütközések esetén egyenértékű az, hogy az ütközési szám 1, illetve az, hogy a mozgási energia megmarad*. Mivel a mozgási energia megmaradásának nem csak centrális ütközés esetén van értelme, ezért az alábbi definíciót használjuk (ami centrális ütközések esetén a korábbi definícióval egyenértékű):

Definíció: Két test ütközése rugalmas, ha a mozgási energiák összege az ütközésben nem változik.

.10) Tökéletesen rugalmasan, centrálisan ütközik két szemben haladó test: Egyik 3 kg-os és 8 m/s sebességű, a másik 5 kg, 4 m/s.

a) Mekkora lesznek az ütközés utáni sebességek? **(7m/s, 5m/s ellentétesen)**

b) Megmarad-e a mozgási energia? **(igen)**

Oldjuk meg a feladatot ütközésszám használatával is és lendületmegmaradás és mozgási energiamegmaradás együttes használatával is! Ez utóbbi esetben a másodfokú egyenletrendszerből ki kell jönnie az eredeti, ütközés előtti állapotnak is, ami megerősít minket abban, hogy nem vétettünk számolási hibát!

Ütközési számmal:

A közös sebesség $v_0 = [3 \text{ kg} \cdot 8 \text{ m/s} + 5 \text{ kg} \cdot (-4 \text{ m/s})] / (3 \text{ kg} + 5 \text{ kg}) = 0,5 \text{ m/s}$.

Az első test eddigi sebességváltozása $\Delta v_1 = v_0 - v_1 = -7,5 \text{ m/s}$, ezért az új sebessége: $v_1' = v_0 + 1 \cdot \Delta v_1 = -7 \text{ m/s}$.

A másodikonál hasonlóan $\Delta v_2 = v_0 - v_2 = 4,5 \text{ m/s}$, ezért az új sebessége: $v_2' = v_0 + 1 \cdot \Delta v_2 = 5 \text{ m/s}$.

Egyenletrendszerrel:

$3 \text{ kg} \cdot 8 \text{ m/s} + 5 \text{ kg} \cdot (-4 \text{ m/s}) = 3 \text{ kg} \cdot v_1' + 5 \text{ kg} \cdot v_2'$ a lendületmegmaradásból.

$\frac{1}{2} \cdot 3 \text{ kg} \cdot (8 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ kg} \cdot (-4 \text{ m/s})^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ kg} \cdot (v_1')^2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ kg} \cdot (v_2')^2$ az energiamegmaradásból.

Az első egyenletből v_2' -t kifejezve, és azt a második egyenletbe helyettesítve, másodfokú egyenlet adódik v_1' -re:

$(v_1')^2 - 1 \text{ m/s} \cdot v_1' - 56 \text{ m}^2/\text{s}^2 = 0$. Ennek megoldása $v_1' = 8 \text{ m/s}$ illetve -7 m/s , ezért két megoldaspár van: a testek sebességei ütközés után 8 m/s és -5 m/s, illetve -7 m/s és 5 m/s.

Az első megoldaspár az eredeti állapotot adja vissza, ez ütközés nélküli áthaladást jelentene egymáson, ezért ez lehetetlen. Viszont megerősít minket abban, hogy számolási hibát nem vétettünk.

Az ütközés utáni sebességek tehát -7 m/s és 5 m/s.

.11) Egy 20 kg-os, 8 m/s sebességű test utolér egy 12 kg-os, 5 m/s sebességűt, és tökéletesen rugalmasan ütköznek.

a) Mekkora lesznek az ütközés utáni sebességek? **(5,75m/s; 8,75m/s)**

b) Megmarad-e a mozgási energia? **(igen)**

Oldjuk meg a feladatot ütközésszám használatával is és lendületmegmaradás és mozgási energiamegmaradás együttes használatával is!

Az előző kérdéshez hasonlóan, kétféleképpen.

.12) Azonos tömegű testek tökéletesen rugalmasan, centrálisan ütköznek. Mekkora az új sebességek? **(sebességcsere történik)**

Mind ütközési számot, mind egyenletrendszert paraméteresen használva, sebességcsere adódik: $v_1' = v_2$ és $v_2' = v_1$.

.13) Az m tömegű, v sebességű test rugalmasan, centrálisan ütközik M tömegű, V sebességű testtel.

a) Mekkora az új sebességek? $\left(v' = \frac{(m-M)v + 2MV}{M+m}; \quad V' = \frac{2mv + (M-m)V}{M+m} \right)$

b) Mi történik, ha M sokkal nagyobb m -nél és a nagy test eredetileg állt? **(a kis test ellentétes sebességgel visszapattan)**

c) Mekkora a sebességek és hogyan változik meg a kicsi test nagyhoz viszonyított relatív sebessége, ha a nagy test tömegéhez képest elhanyagolható a kicsi tömege? $(v' = 2V - v; \quad V' = V)$ **(a relatív sebesség ellentétes lesz)**

a) Számoljunk paraméteresen ütközési számmal, vagy lendület és energiamegmaradással.

$$v' = \frac{(m-M)v + 2MV}{M+m}; \quad V' = \frac{2mv + (M-m)V}{M+m}$$

b) $v' = \frac{(m/M-1)v + 2V}{1+m/M}; \quad V' = \frac{2m/Mv + (1-m/M)V}{1+m/M}, \quad V=0 \text{ és } m/M \approx 0$. Adódik: $v' = -v$ és $V' = 0$. A nagy test nyugalomba marad, róla ellentétes sebességgel visszapattan a kicsi.

c) $m/M \approx 0$, adódik, hogy $v' = 2V - v$ és $V' = V$.

A kicsi test nagyhoz képesti relatív sebessége ellentétesre változott [$v' - V' = -(v - V)$], miközben a nagy test szinte „észre sem veszi” az ütközést.

.14) A 2 m magasról leejtett labda 1,6 m magasra pattan. ($g=9,81 \text{ m/s}^2$)

- a) Mekkora az ütközési szám? **(0,894)**
- b) Mekkora lesz a 3. felpattanási magasság? **(1,02 m)**
- c) Lesz-e utolsó felpattanás, illetve mennyi ideig fog pattogni? **(nem, 11,46 s)**

- a) Ha az i -edik pattanás utáni sebesség v_i , a felszállási (és visszaesési) idő t_i , a felpattanási magasság pedig h_i , akkor az ütközési szám jelentése szerint $k = v_i/v_{i-1}$. De a szabadesésnél $v_i \sim t_i$ és $h \sim t_i^2$, tehát $k = t_i/t_{i-1}$ illetve $k^2 = h_i/h_{i-1}$. A sebességek, a leesési idők és a magasságok mértani sorozatot alkotnak, melyek hányadosa rendre k , k , és k^2 .

Most $k^2 = 1,6m/2m$, azaz $k = \sqrt{0,8}$

- b) $h_3 = h_0 \cdot (k^2)^3$

- c) Mivel h_i sosem lesz 0, ezért nincs utolsó felpattanás, a levegőben töltött idők, és az ezalatt megtett távolságok (a második tagtól kezdve) végtelen mértani sort alkotnak: $t_{\text{össz}} = t_0 + 2t_1 + 2t_2 + 2t_3 + \dots = 2(t_0 + t_1 + t_2 + \dots) - t_0 = 2(t_0 + kt_0 + k^2t_0 + \dots) - t_0$ illetve

$s_{\text{össz}} = s_0 + 2s_1 + 2s_2 + 2s_3 + \dots = 2(h_0 + h_1 + h_2 + \dots) - h_0 = 2(h_0 + k^2h_0 + k^4h_0 + k^6h_0 + \dots) - s_0$ Az ilyen (zárójelben lévő) típusú végtelen összegek (mértani sor) kiszámítására létezik matematikai képlet: Az $a + ka + k^2a + k^3a + \dots$ mértani sor összege $\frac{a}{1-k}$, amennyiben $|k| < 1$.

Az idők összege tehát $t_{\text{össz}} = 2(t_0 + kt_0 + k^2t_0 + \dots) - t_0 = 2 \cdot \frac{t_0}{1-k} - t_0 = \frac{1+k}{1-k} t_0$, ahol $t_0 = \sqrt{2h_0/g} = 0,6386 \text{ s}$

Hasonlóan $s_{\text{össz}} = 2(h_0 + kh_0 + k^2h_0 + \dots) - h_0 = 2 \cdot \frac{h_0}{1-k^2} - h_0 = \frac{1+k^2}{1-k^2} h_0$.

.15) Egy leejtés után pattogó labda 4. és 7. felpattanásai magasságainak aránya 3:1.

- a) Mekkora az ütközési szám? **(0,833)**
- b) A mozgási energia hányad része tűnik el egy ütközéskor? **(30,7%)**
- c) Összesen mennyi ideig fog pattogni és összesen mekkora utat tesz meg ezalatt? **(10,29 s; 23,90 m)**

- a) A szomszédos magasságok a szomszédos sebességek négyzetével arányosak, a sebességek arány pedig k . Így a 4. pattanás után még 3-at pattanva: $h_7 = h_4 \cdot (k^2)^3$, tehát $k^6 = 1/3$, sőt $h_0 = h_4 / (k^2)^4 = 4,327 \text{ m}$.

- b) A mozgási energia a sebességek négyzetével arányos, így a szomszédos mozgási energiák aránya k^2 , elveszik $1-k^2$.

- c) $t_{\text{össz}} = 2(t_0 + kt_0 + k^2t_0 + \dots) - t_0 = 2 \cdot \frac{t_0}{1-k} - t_0 = \frac{1+k}{1-k} t_0$, ahol $t_0 = \sqrt{2h_0/g} = 0,9392 \text{ s}$

Hasonlóan $s_{\text{össz}} = 2(h_0 + kh_0 + k^2h_0 + \dots) - h_0 = 2 \cdot \frac{h_0}{1-k^2} - h_0 = \frac{1+k^2}{1-k^2} h_0$.

.16) Egy labdát 3 m magasról leejtve, az összesen 8 s-ig pattogott. *Mekkora az ütközési szám? **(0,822)**

$8 \text{ s} = 2(t_0 + kt_0 + k^2t_0 + \dots) - t_0 = 2 \cdot \frac{t_0}{1-k} - t_0 = \frac{1+k}{1-k} t_0$, ahol $t_0 = \sqrt{2h_0/g} = 0,7821 \text{ s}$. Ebből k számolható.

.17) Egy kis test pillanatszerűen ütközik súrlódásmentes falnak, sebessége az ütközés előtt $\alpha=60^\circ$ -os, utána pedig $\beta=30^\circ$ -os szöget zár be a fallal.

- a) Mekkora az ütközési szám? **(1/3)**
- b) Milyen kapcsolat van a fallal bezárt α és β szögek, és az ütközési szám között általában? **($\tan \beta = k \cdot \tan \alpha$)**

- a) A pillanatszerűség és a súrlódás hiánya miatt a fal csak merőleges nyomóerőt fejt ki, ...
...ez csak a merőleges sebességkomponenst nagyságát változtatja v_m -ről kv_m -re, a párhuzamos sebességkomponens változatlan.

Bontsuk a sebességeket merőleges és párhuzamos komponensekre, és alkalmazzunk szögfüggvényeket.

- b) Paraméteresen számoljunk.

.18) Egy kis test súrlódásos falnak ütközik tökéletesen rugalmasan, a súrlódási együttható $\mu=0,2$. A test sebessége az ütközés előtt 60° -os szöget zár be a fallal.

- a) Mekkora lesz az ütközés utáni sebesség iránya? **(79,9°)**

- b) Milyen kapcsolat van a fallal bezárt α és β szögek, és a súrlódási együttható között általában? ($\text{ctg}\beta = \text{ctg}\alpha - 2\mu$)
- c) Milyen összefüggés áll fenn a két szög, a súrlódási együttható és az ütközési szám között, ha az ütközés nem tökéletesen rugalmas? [$\text{ctg}\alpha - k \cdot \text{ctg}\beta = (1+k)\mu$]
- a) A $S = \mu N$ súrlódási erő csak a párhuzamos sebességkomponenst változtatja, míg a merőleges N nyomóerő csak a merőleges sebességkomponenst.
A kicsi idő alatti erőlököseik lendületváltozást okoznak: $\Delta I_p = S \Delta t$, illetve $\Delta I_m = N \Delta t$.
Vegyük a hányadosukat: $\frac{|\Delta v_p|}{|\Delta v_m|} = \mu$, azaz $(v_p' - v_p)/2v_m = \mu$. Most jönnek a szögfüggvények a sebességkomponensek között: $\text{ctg}\alpha = v_p/v_m$, és $\text{ctg}\beta = v_p'/v_m$.
- b) Számoljunk paraméteresen.
- c) A merőleges sebességkomponens most kv_m nagyságúra változik.

.19) Súrlódásmentes asztalon meglökött érme ugyanolyan, álló érmének ütközik, pillanatszerűen, tökéletesen rugalmasan, de nem centrálisan. A mozgó érme 5 m/s nagyságú sebességvektora az ütközés pillanatában 30° -os szöget zár be a középpontokat összekötő egyenessel. Az érmék érintkező peremén sincs súrlódás.

- a) Mekkora az ütközés utáni sebességek? (**4,33 m/s, 2,50 m/s**)
- b) Mekkora lesz a két érme pályájának szöge? (**90°**)
- c) Mekkora lesz a két érme pályájának szöge, ha kezdetben a v_0 sebesség más irányú volt? (**90°**)

Ötlet1:

Az ütközés pillanatszerűsége miatt a centrális iránya az ütközés rövid ideje alatt nem változik, így ezen irányban van csak erő közöttük, ugyanis az érmék között sincs súrlódás az érintkezés ideje alatt.

Az érkező érme sebességét bontsuk a centrálissal párhuzamos-, és arra merőleges komponensre.

Az ütközésben **a merőleges sebességkomponens nem változik**, ezért az ezzel számolt mozgási energia sem, így a rugalmasságot kifejező mozgási energia megmaradás miatt a centrálissal párhuzamos sebességkomponensekhez tartozó mozgási energiák összege is állandó marad, azaz **az ütközés a centrális mentén, rugalmas ütközés lesz!**

A centrális mentén az egyenlő tömegek rugalmas ütközése sebességcserét eredményez.

Végül az érkező érmén marad a kezdeti merőleges sebességkomponens, míg a meginduló másik érme viszi a beérkező érme másik sebességkomponensét. Így az ütközés utáni sebességek szöge 90°

Ötlet1:

Az egyenlő tömegek miatt a lendületmegmaradás a sebességvektor megmaradásáról, míg az energiamegmaradás a sebességvektor-négyzetösszeg megmaradásáról szól: $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_0$ és $v_1^2 + v_2^2 = v_0^2$.

Az első miatt, a vektorösszeadás szabályai szerint egy háromszöget kell elképzelnünk, melynek oldalai v_1 , v_2 , v_0 hosszúságúak, míg a másik feltétel ebben a háromszögben a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint azt jelenti, hogy v_1 és v_2 oldalak között 90° -os szög van.

.20) Súrlódásmentes asztalon meglökött érme fele akkora tömegű álló érmének ütközik ferdén, tökéletesen rugalmasan, pillanatszerűen. Az érmék érintkező peremén sincs súrlódás. A mozgó érme sebességvektora az ütközés pillanatában 30° -os szöget zár be a középpontokat összekötő egyenessel.

- a) Milyenek az ütközés utáni sebességvektorok, ha a mozgó érme sebessége v_0 volt? (**$0,577v_0$; $1,154v_0$**)
- b) Mekkora lesz a két érme pályájának szöge? (**60°**)
- c) Mekkora legyen az érkező érmének a centrálissal bezárt szöge, hogy az ütközés utáni sebességek szöge 70° legyen? (**$42,48^\circ$**)
- a) A centrális irányára merőleges sebesség állandó marad, míg a centrális irányába rugalmas ütközés zajlik, de 2:1 tömegarányú érmék között.
A centrális mentén a kezdeti $v_0 \cos \phi$ és 0 sebességek megváltoznak $1/3 \cdot v_0 \cos \phi$ és $4/3 \cdot v_0 \cos \phi$ -re.
Így az érkező érme sebességvektorának hossza két komponenséből számolható: $v_0/\sqrt{3}$ míg a meglökött érméé ennek dupája nagyságú.
- b) Az érkező érme ütközés utáni sebességének szöge a komponensekből számolható tg szögfüggvénnyel.
- c) Paraméteresen számolva az előző részfeladatokban, az ütközés után a meglökött érme a centrális irányába halad, míg az érkező érmének az ütközés után a centrálissal bezárt ω szögére: $\text{tg} \omega = 3 \text{tg} \phi$.

.21) Súrlódásos asztalon álló érme ütközik ferdén, rugalmasan egy másik, ugyanolyan érme. A pillanatszerű ütközés után az eredetileg mozgó érme 8 cm -t, a másik érme 4 cm -t csúszott. (A lassulásuk ugyanaz!) A két érme között érintkezéskor nincs súrlódás.

- a) Mennyit csúszott volna még a mozgó érme, ha nem ütközött volna az álló érme? (**12 cm**)
- b) Mekkora az ütközés utáni sebességek szöge? (**90°**)
- c) Mekkora a kezdősebesség és a centrális szöge? (**$54,74^\circ$**)

- a) Az azonos lassulásuk miatt a kezdősebességgel arányos a megállási idő. A közben megtett út pedig az átlagsebességgel (kezdősebesség fele) és az idővel arányos, tehát....
...a megtett út a kezdősebesség négyzetével arányos.
Tehát az út a kezdeti mozgási energiával. De az ütközésben a mozgási energia megmarad.
- b) Egyenlő tömegek rugalmas, pillanatszerű ütközése, közöttük súrlódás nincs. Ld. előző feladatot! v_0 , v_1 , v_2 alkotta vektorháromszög derékszögű. Avagy a kezdősebességet bontani kell a centrális irányába és rá merőlegesen.
- c) Az ütközés előtti sebesség komponenseinek aránya a megállásig megtett utak arányának gyöke.

.22) Ferde ütközés $\phi = 30^\circ$ alatt, súrlódásmentes asztalon, pillanatszerűen, azonos méretű érmekkel. Az érmék között súrlódás nincs, kezdetben egyikük állt. Az ütközési szám $0,8$.

- a) Mekkora az ütközés utáni sebességük szöge? (**$80,17^\circ$**)
- b) Milyen kapcsolat van k ütközési szám esetén az ütközés előtti ϕ és az ütközés utáni ω szög (érkező érme és a centrális szöge) között? (**$\tan \omega = 2/(1-k) \cdot \tan \phi$**)

A centrális mentén $k=0,8$ -as ütközés, rá merőleges sebesség megmarad.

.23) Két rugalmas labda függőlegesen egymásra van helyezve. A felső m_1 tömege legfeljebb akkora mint az alsó m_2 tömege ($\lambda = \frac{m_1}{m_2} \leq 1$). A két labdát ebben a helyzetben elejtjük. A talajra v_0 sebességgel érkeznek. Minden ütközés (testek, talaj között) pillanatszerű, centrális és rugalmas.

- a) Számoljuk ki a labdák sebességeit, amivel a talajtól elpattannak, és mutassuk ki, hogy a felső labda csak egyszer ütközik az alsóval. [Az első egymással való ütközés után a sebességek (felfelé+):
a felsőé $(3-\lambda)/(1+\lambda)v_0$; az alsóé $(1-3\lambda)/(1+\lambda)v_0$]
- b) Mi történne $m_1=m_2$ esetén, illetve $m_1 < m_2$ esetén? (visszafelé együtt haladnának, illetve az alsó visszapattan v_0 , a felső $3v_0$ sebességgel.)
- c) Mekkora legyen a tömegarány, hogy az alsó nyugalomban maradjon a talajon? ($\lambda=1/3$)
- d) Az eredeti ejtési magasságnak legfeljebb hányszorosára pattanhat fel a felső kicsi labda? Milyen tömegarány esetén közelíti meg ezt a magasságot? (**$9h_0$; $\lambda=0$**)
- e) Az előző kérdésre egy furfangos gondolatmenetet javasolt egy diák: *Ha az alsó labda a talajon marad, akkor a kicsi labda viszi el a folyamatban megmaradó mozgási energia egészét. A felső labda azonban annál magasabbra megy, minél több a mozgási energiája. Így a kis labda akkor megy a legmagasabbra, ha a nagy labda a talajon marad, tehát $\lambda=1/3$ esetén. Ez ellentmondani látszik a d) pont eredményének.* Mi benne a hiba? (?)
- f) Mérjük meg a labdák tömegeit. Mekkora magasságba kellene a kicsi labdának felpattannia, ha tökéletesen rugalmasak lennének az ütközések? Végezzük el a kísérletet, mérve a kis labda felpattanását!

- a) Előbb az alsó labda ütközik a talajjal, és visszapattan v_0 sebességgel,...
...majd a felső és alsó labda szemben ütközik rugalmasan. Ez könnyen követhető az ütközés két részre osztásával is, és lendület és mozgási energia megmaradással is.
A felső labda akkor ütközne megegyezően az alsóval, ha az alsó az első ütközés után a talaj felé pattanna ($\lambda > 1/3$), majd onnan ellentétes, $(3\lambda-1)/(1+\lambda)v_0$ pozitív sebességgel és ez a sebesség nagyobb lenne, mint a felső labda $(3-\lambda)/(1+\lambda)v_0$ sebessége. Ez azonban nem fordulhat elő, mert ehhez $\lambda > 1$ kellene.

- b) Határesetek.
A $\lambda=0$ esetben az alsó labda észre sem veszi a kicsivel való ütközést, míg a kicsi a nagyhoz képest pattan vissza ellentétes sebességgel.
A $\lambda=1$ esetén 3 ütközés után közösen indulnak visszafelé.
- c) Az alsó sebességének 0-nak kell lennie ütközés után.

- d) A felső labda sebességét kell maximalizálni, azaz a $(3-\lambda)/(1+\lambda)$ törtet, miközben λ a $[0;1]$ intervallumban van. Vizsgáljuk meg, melyik hogyan változik, ha λ nő. Legfeljebb 3 lehet a tört, amihez 9-szeres felpattanási magasság tartozik.
- e) Vegyük sorra az alábbi állításokat:
 A mozgási energia valóban állandó marad az ütközések során?
 Valóban akkor lesz legtöbb a felső labda energiája, ha mind az övé lesz?
 Biztos-e, hogy akkor megy a legmagasabbra, ha a legtöbb *mozgási energiával* indul visszafelé?
 Igen, igen, nem (a magasság csakis a *sebességtől* függ).

A mozgási energia képletében a tömeg és a sebesség is függ λ -tól. A felpattanó labda sebessége szigorúan monoton csökkenő, az elvitt energiahányad szigorúan monoton növekedő függvénye λ -nak!

A λ -tól függ a mozgási energiában az m_1 tömeg is és a visszapattanási sebesség is. A felpattanási sebesség nem akkor maximális, amikor az elvitt energiahányad!

.24) A faltól L távolságra áll az M tömeg, a fal felől érkezik az m tömeg, ami előbb M -mel, majd a fallal ütközik. Súrlódás nincs, az ütközések rugalmasak. A testek kiterjedése elhanyagolható.

- a) Mekkora M/m tömegarány esetén fog másodszor is ütközni az m és M tömeg? ($M/m > 3$)
 b) A faltól milyen távol lesz a második ütközés, ha $m=0,2$ kg, $M=0,8$ kg, $L=3$ méter? (15 m)
- a) Számoljunk paraméteresen a rugalmas ütközést: A nagy test sebessége $V=2/(1+\lambda)v_0$, míg a kicsié $v=(1-\lambda)/(1+\lambda)v_0$ lesz. A második ütközés előtt a kis test a falnál sebességirányt vált, majd a fenti sebesség ellentettjével indul a nagy után. Az utolérés feltétele, hogy sebessége nagyobb legyen.
 b) A két ütközés között a nagy test L_2-L_1 utat tesz meg, a kicsi pedig L_1+L_2 utat (azonos idők alatt). A sebességek most ismeretek.

.25) Az m tömegű $L = 10$ cm hosszú kiskocsi benne van egy H belső hosszúságú, M tömegű, asztalon álló nagy kocsi, melynek mindkét fala rugalmas. Súrlódás sehol sincs, az ütközések rugalmasak. A rendszer teljes tömege 2 kg. A rendszer nyugalmi helyzetében a nagy kocsit 20 cm/s sebességgel hirtelen lökésbe hozzuk. Kis idő múlva a nagy kocsi sebessége 12 cm/s-re csökken, majd 2s múlva újra megnő.

- a) Mekkora a kicsi kocsi tömege? (0,40 kg)
 b) Mekkora a nagy kocsi belső H hosszúsága? (50 cm)
- a) A súrlódás hiánya miatt a kicsi kocsi állni fog, amíg a nagy kocsi neki nem ütközik a hátfalával. A rugalmas ütközést bármelyik módszerrel számolva, a nagy kocsi új sebességét ismerve, a tömegarány rögtön adódik.
 b) Ebből a kis kocsi sebessége 32 m/s lesz. A két kocsi relatív mozgásának ideje 2s, relatív elmozdulásuk $H-L$, relatív sebességük ismert.

.26) Az űrben egymástól 20 m távolságra „lebeg” egy 1000 kg-os űrhajó és egy 100 kg-os műhold. Az űrhajó mellett lévő 100 kg-os űrhajós elrugaszkodik az űrhajótól 11 m/s relatív sebességgel a műhold felé, hogy annak antennáját megigazítsa. Ott 13 s ideig dolgozik, majd visszafelé, az űrhajó irányába rugaszkodik el.

- a) Legalább mekkora relatív sebességgel rugaszkodjon el a műholdtól, hogy visszajusson az űrhajóhoz? (12m/s)
 b) Mekkora legyen az elrugaszkodáskor a műholdhoz képesti relatív sebesség, hogy 10 s alatt jusson vissza az űrhajóhoz? (32m/s)
 c) Melyik elrugaszkodásakor esetén kellett „erősebben” ellöknie magát, ha az ellökési folyamatok ideje azonos volt? (2.)
 d) Mikor végzett nagyobb munkát? (2.)
- a) Rögzítsük a koordináta rendszert oda, ahonnan az ember elindult. Az elrugaszkodáskor a lendület megmarad. A két ellentétes sebesség nagyságának összege adott. Kiszámítható, mennyi ideig repül a műhold felé. Ott egy rugalmatlan ütközés során sebességük közös marad a munka időtartamára. Akkor jut vissza az űrhajóhoz, ha a visszarugaszkodás után a sebessége meghaladja az korábban meglökött űrhajójét.
 b) Az előírt érkezési idő, a mostanra kialakult távolságokkal együtt meghatározza az elrugaszkodás sebességét (érdemes a relatív mozgást vizsgálni). A lendület megmarad.
 c) Az elrugaszkodás során közük ható erő a miatta elszenvedett sebességváltozással arányos.
 d) A végzett munkája mozgási energiát vitt a rendszerbe, növelve azt.

.27) Egy 30° -os hajlásszögű, $M = 3 \text{ kg}$ tömegű, vízszintes síkon álló, nem rögzített lejtőre 2 m magasságból $m = 1 \text{ kg}$ tömegű labdát ejtünk. Súrlódás nincs. A lejtő alja nem rugalmas.

- a) Mekkora a testek sebessége a teljesen rugalmas ütközés után? **(4,14 m/s, 1,36 m/s)**
- b) Mekkora lennének a sebességek, ha a labda a lejtő anyagával azonos anyagú vízszintes asztalra 2 m magasról ejtve, csak $1,5 \text{ m}$ magasra pattanna vissza? **(3,81 m/s, 1,27 m/s)**

- a) Előbb a labda ferdén a lejtőnek ütközik, rugalmasan. A beérkezési sebességet bontani kell lejtőre merőleges és vele párhuzamos komponensre.

A merőleges irányú rugalmas ütközésből szerzett labda-sebességet össze kell adni a változatlanul maradt sebességkomponenssel.

Ezután a lejtő „ütközik” a talajjal. A lejtő sebességéből el kell hagyni a függőleges komponenst, mert a lejtő alja nem rugalmas, marad csak a talajjal párhuzamos komponens.

- b) A feladat ugyanaz, csak az ütközés nem rugalmas. Az ütközési szám $k = v_{fel}/v_{le} = \sqrt{h_{fel}/h_{le}} = \sqrt{3}/2$.

.28) Egy α hajlásszögű rögzített, hosszú lejtőre teljesen rugalmasan ütköző kislabdát dobunk merőlegesen, mely a lejtőn „lefelé” kezd pattogni. A lejtővel való első két érintkezési pont távolsága d . Mekkora lesz az 5. és 6. érintkezési pont távolsága? **(9d)**

Használjunk lejtővel párhuzamos (x) és rá merőleges (y) tengelyű koordináta-rendszert, miközben a nehézségi gyorsulás vektorát felbontjuk x és y komponensekre.

Ebben a labda mozgása y irányban egyenletesen gyorsuló-ütköző, akárcsak a megszokott „szabadesés”-sel kapcsolatos feladatokban, egyenlő időközönként, rugalmasan pattanva.

Most x irányban is gyorsuló a mozgás, de a kezdeti merőleges indítás miatt x irányban nincs kezdősebesség.

Az x irányú mozgás egyenletesen gyorsuló, nyugalomból induló, és a pattanások között egyenlő időtartamok telnek el. Galilei fogalmazta meg (de könnyen levezethető), hogy az egyenlő időtartamok alatt megtett utak arányát a páratlan természetes számok aránya adja meg, 1-től kezdődően: 1:3:5:...

.29) Függőlegesen, 40 m/s sebességgel fellőtt 3 kg -os lövedék a fellövés után 2 s -mal felrobban. Az egyik, 1 kg -os darab a robbanás után 1 s -mal esett le, 20 m távol a fellövés helyétől. Mikor és hol esett le a másik darab? (A nehézségi gyorsulás értéke legyen $g = 9,81 \text{ m/s}^2$!) **(12,85 s; 128,5 m)**

A robbanás magassága, és a robbanáskori összlendület számolható.

A kicsi test hajítási adataiból a kicsi test robbanáskori sebességének mindkét komponense számolható.

A lendületmegmaradás megadja a nagy test robbanás utáni sebességkomponenseit, amikkel ferde hajítás történik.

.30) Az atomreaktorban a maghasadáskor keletkező gyors neutronokat mielőbb le kell lassítani, ezért valamely anyag álló atommagjaival ütköztetik őket többször, egymásután. *Tételezzük fel, hogy a lassító anyag atomjai között nincs kölcsönhatás, még akkor sem, ha ugyanazon molekula tagjai!*

- a) Melyik anyag a legalkalmasabb erre a feladatra, ha a környezetben található anyagok közül lehet választani, és célszerű figyelembe venni azok beszerzési árát is? Vizsgáljunk centrális ütközéseket! **(M legyen minimális!)**
- b) Hány ütközésre lenne szükség, a neutront $1/100$ -ad részére akarjuk lassítani, és hidrogéngáz, avagy héliumgáz, avagy szén, avagy oxigén lenne a lassító? **(1, 9, 28, 37)**

- a) Rugalmas ütközés álló M tömegű mag és mozgó m tömegű neutron között. A neutron ütközés utáni sebességének nagysága az eredeti sebességének $(M-m)/(M+m)$ -szerese ellentétes irányba.

Ennek minimuma kis átalakítás után jól látszik: $1 - \frac{2m}{M+m}$ akkor minimális, ha M is az.

A periódusos rendszerben előforduló atommagok közül növekvő magtömeg alapján vizsgálva, az első olcsó (mert nagy tömegben elérhető) anyag a hidrogén majd a szén (grafit).

A gáz halmazállapotú lassítóanyag nem jó, mert kicsi sűrűsége miatt ritkák az ütközések. Másfelől a lassítóanyag vegyületben is jelen lehet, hiszen a nagy sebességű neutron ütközésekor a meglökött mag könnyen kiszakad a kémiai kötésből (ld. a feltételt).

Így a legjobb a hidrogéntartalmú víz, amiben az oxigén sem túl nehéz mag, illetve a szén grafit formájában. Azonban a lassítóanyag kiválasztásának más fontos szempontjai is vannak, melyek miatt a grafit a mai reaktorokban már nem kívánatos!

- b) Pl.: Hidrogén át tudja venni a neutron teljes mozgási energiáját, egy ütközés is elég.

pl.: Grafít: $\lambda=M/m=12$, egy ütközés után a sebesség $11/13$ -ára csökken. Kitartással, vagy logaritmussal adódik, hogy $(11/13)^{28}=0,0093$, ami kb. 0,01.

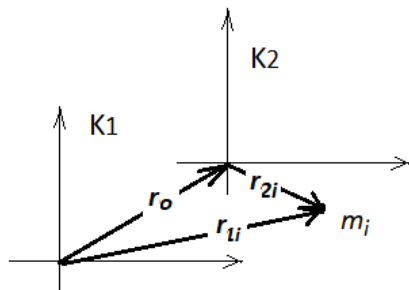
pl.: Oxigén esetén 37 ütközés kell.

Víz lassítóanyag esetén az ütközés lehet az oxigénatommal, avagy a protonnal.

.31) *

- Hogyan változik egy pontrendszer összlendülete, ha K_1 rendszerről K_2 rendszerre térünk át?
- Igaz lesz-e a K_2 rendszerben a lendület-megmaradás tétele, ha K_1 -ben igaz volt (pl. egy ütközési folyamatban)? (vö: Galilei-elv) (**igen**)
- Tekintsük a fiktív, $\mathbf{r}_o = \Sigma(m_i \mathbf{r}_i) / \Sigma m_i$ helyvektorú **tömegközéppontot**. Hogyan határozható meg helye a gyakorlatban?
- Mutassuk meg, hogy a tömegközéppont - ha ide összesűrítve képzeljük el a rendszer össztömegét- a lendületével a rendszer összlendületét hordozza, bármilyen rendszerből nézve.
- Mekkora a pontrendszer lendülete a tömegközéppontból nézve? (**0**)
- Hogyan mozog zárt rendszer tömegközéppontja? Keressünk erre példákat a megoldott feladatok között! (**állandó sebességgel**)

- Legyen a K_1 rendszerben az i -edik test (látszó) helyvektora $\mathbf{r}_{1i}$, sebességvektora $\mathbf{v}_{1i}$, miközben a hozzá képest nem forgó K_2 rendszerben a megfelelő $\mathbf{r}_{2i}$ és $\mathbf{v}_{2i}$ vektorok látszanak. A K_1 rendszerről nézve a K_2 rendszer origójának helyvektora és sebességvektora $\mathbf{r}_o$ ill. $\mathbf{v}_o$ legyen. Ekkor (az ábra szerint is): $\mathbf{r}_{1i} = \mathbf{r}_o + \mathbf{r}_{2i}$.

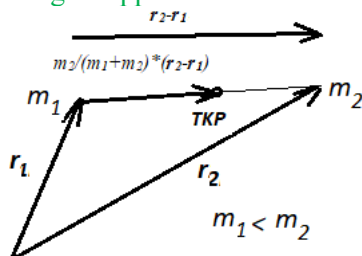


Vegyük mindkét oldal kicsi Δt alatti megváltozását, majd osszuk el a kicsi Δt időtartammal. Így a sebességek között fennáll: $\mathbf{v}_{1i} = \mathbf{v}_o + \mathbf{v}_{2i}$. Megszorozva ezt az i -edik pont tömegével, és összegezve mindkét oldalt a teljes rendszerre, $\mathbf{I}_1 = (\Sigma m_i) \mathbf{v}_o + \mathbf{I}_2$ adódik, ahol $\mathbf{I}_1$ és $\mathbf{I}_2$ a keresett két lendületvektor-összeg.

A régi (K_2) rendszerről az új (K_1) rendszerre áttérve, a pontrendszer *régi* lendületét meg kell toldani azzal a lendülettel, ami az *új rendszerből látszana*, ha az *össztömeget a régi rendszer origójában egyesítenénk*.

- Ha a fenti egyik rendszerben igaz, akkor pontosan akkor lesz igaz a másikban is, ha a két rendszer egymáshoz képesti sebességvektora állandó.

- Két tömegpont** esetén $\mathbf{r}_{TKP} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ amiből az ábra lapján látható, hogy a tömegközéppont a két testet összekötő szakaszon van, azt a tömegek fordított arányában osztva.



A pontrendszernél a tömegközéppont **helye nem változik**, ha két tömeget a helyükről elvéve, őket a kettejük tömegközéppontjába helyezük át. Ennek igazsága az alábbi átalakításból látszik:

$$\mathbf{r}_{TKP} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 + \dots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{(m_1 + m_2) \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{(m_1 + m_2)} + m_3 \mathbf{r}_3 + \dots + m_n \mathbf{r}_n}{(m_1 + m_2) + m_3 + \dots + m_n}$$

Szimmetrikus testeknél páronként kettesével átrakva a pontokat a szimmetriacentumba, a tömegközéppont is itt lesz.

- A tömegközéppont definícióját megszorozva a tömegek összegével: $(\Sigma m_i) * \mathbf{r}_{TKP} = \Sigma(m_i \mathbf{r}_i)$ adódik. Kis idő alatti megváltozását az idővel elosztva: $(\Sigma m_i) * \mathbf{v}_{TKP} = \Sigma(m_i \mathbf{v}_i)$

- e) $(\sum m_i) \cdot \mathbf{v}_{TKP} = \sum (m_i \mathbf{v}_i)$. Ha az origónk a tömegközéppont, akkor a jobb oldal *a tömegközéppontból látszó lendületösszeg*, amit keresünk. A bal oldalon *a tömegközéppontnak a tömegközéppontból látszó sebességvektora* szerepel.. Ez pedig $\mathbf{0}$. Tehát a keresett lendületösszeg is $\mathbf{0}$.
- f) Zárt rendszer lendülete IR-ben állandó. A rendszer lendületét a tömegközéppont hordozza : $(\sum m_i) \cdot \mathbf{v}_{TKP}$. Így *tömegközéppont minden zárt rendszerben állandó sebességgel mozog* IR-ből nézve. (pl.: a TKP mozgásán nem lehet észrevenni az ütközés tényét.)