

14-Egyenáramok

.1) Egy fémbe a vezetési elektronok száma köbméterenként $8,4 \cdot 10^{28}$. Ha ebből a fémbe készült 100 m hosszú huzalra 9,4 V feszültségű, elhanyagolható belső ellenállású telepet kapcsolunk, akkor az elektronok átlagosan $4 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s}$ sebességgel haladnak a telep pozitív sarka felé.

.a) Mekkora az áramsűrűség (áramerősség és a huzal keresztmetszetének hányadosa)? ($5,38 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$)

.b) Mekkora az adott fém fajlagos ellenállása? ($1,75 \cdot 10^{-8} \Omega m$)

.a) Az A keresztmetszeten Δt idő alatt $Av\Delta t$ térfogatbeli elektron halad át, összesen $nAv\Delta t$. Mindegyikük elektrontöltést visz magával.

Így $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{qnAv\Delta t}{\Delta t} = qnAv$. Ebből az áramsűrűség qnv .

.b) $R = \rho \frac{l}{A}$, ahol $R=U/I$.

Tanulság:

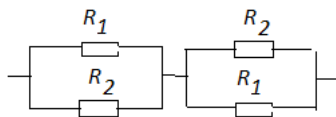
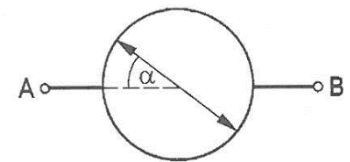
A fentiekből $\rho = R \frac{A}{l} = \frac{U}{I} \frac{A}{l} = E/j$, azaz... $E = \rho j$. Ennek neve: *differenciális ohm-törvény*, mely kapcsolatot teremt a vezetőben uralkodó elektromos *télerősség és a hatására létrejövő áramsűrűség* között.

Meglepőnek tűnhet a vezetési *elektronok nagyon kicsi átlagos sebessége*. Ennek oka, hogy rengeteg van belőlük a vezetőben.

.2) Az ábrán látható kör alakú ellenállás félkörívének ellenállása 360Ω .

.a) Hogyan függ az A és B pontok közötti ellenállás a rövidrezáró csúszka α szögétől? [$720\Omega \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \left(1 - \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}\right)$]

.b) Hány fokok szög esetén lesz az ellenállás 40Ω ? ($10,6^\circ$)

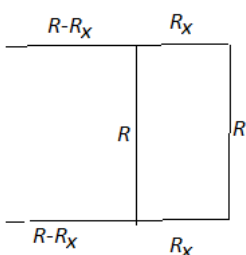
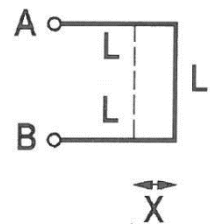


.a) A 360Ω két részre oszlik felül és alul is, a négy ellenállásrész kapcsolása pedig a csúszka 0 ellenállása miatt egy vegyes kapcsolás.

Ennek eredő ellenállását felírjuk R_1 és R_2 -vel, majd felhasználjuk, hogy az ellenállás az ívhosszal, így a szöggel arányos, azaz $R_1 = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} 360\Omega$.

.b) Másodfokú egyenlet adódik a szögre.

.3) A $3L$ hosszúságú, egyenletes keresztmetszetű és vezetőképességű fémhuzalt a harmadolási pontokban derékszögben meghajlítunk. Hol kell ehhez kapcsolni az L hosszúságú, ugyanebből az anyagból levágott vezetőt, hogy az A és B végek között mérhető ellenállás megegyezzen egyetlen L hosszúságú vezető ellenállásával, ha az illesztett vezető párhuzamos a harmadolt vezető középrészével? ($x = \frac{\sqrt{3}}{2} L$)



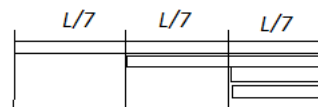
Az ábra szerinti vegyes kapcsolás keletkezik: R_x , R , R_x sorosan, ezek láncával R párhuzamosan, majd ezek blokkjával két db $R-R_x$ sorosan van kapcsolva.

Eredőjük $2(R - R_x) + \frac{R(2R_x + R)}{2R_x + 2R}$. Ennek éppen R -nek kell lennie. Másodfokú egyenlet R_x -re.

Mivel a hosszúság az ellenállással arányos, ezért $x/L = R_x/R$ lesz.

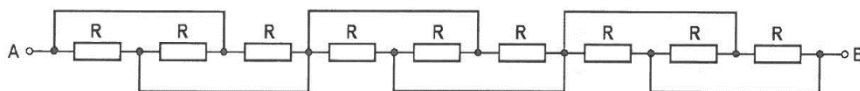
.4) Egyenletes keresztmetszetű és anyageloszlású huzal ellenállása R . A vezeték $\frac{3}{7}$ -ed részét visszahajtjuk, majd a visszahajtott részt a végétől számított $\frac{1}{3}$ -ában ismét visszahajtjuk. Minden szakasz ki van feszítve, a vezetékszakaszok szigetetlenek és egymáshoz simulnak. Mekkora az így kapott vezeték ellenállása, ha $R = 100 \Omega$? **(25 Ω)**

Az ábra szerinti kapcsolás keletkezik. Egy-egy $L/7$ hosszú szakasz ellenállása $R/7$.
Az eredő: $R/7 + R/14 + R/28$.



.5)

a) Rajzoljuk be az áramok irányát és nagyságát az ábrába minden vezeték esetén, ha A potenciálja nagyobb B -énél.
b) Mekkora az ábrán látható rendszer eredő ellenállása? **(R)**

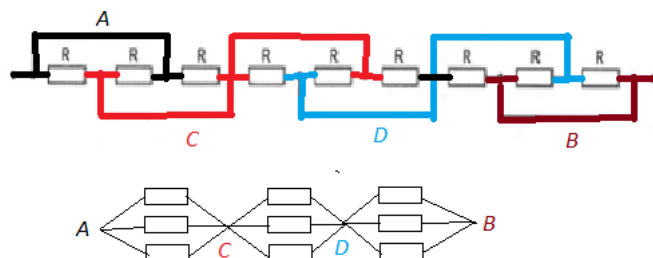


a.) Használjuk Kirchhoff csomóponti törvényét és ügyeljünk rá, hogy ha két azonos ellenállás végei között a potenciálkülönbség megegyezik, akkor rajtuk azonos nagyságú áramok folynak.

A páratlan sorszámú ellenállásokon balról jobbra, a többin jobbról balra folyik I nagyságú áram.
Az alul és felül haladó hosszú, ellenállás nélküli vezetékekben balról jobbra $2I$ áram folyik.

b.) A vezetékek ellenállása 0, ezért az ábrán azonos színnel jelölt pontok azonos potenciálúak. 3-3-3 ellenállás megegyezik abban, hogy a végeik között ugyanaz a potenciál.

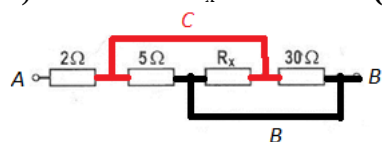
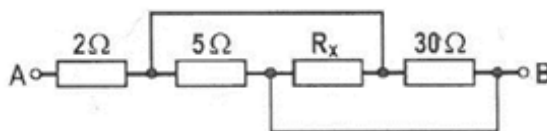
Így a kapcsolás ábrázolható a másik ábra szerint.



Az eredő ellenállás 3-as blokkonként $R/3$, és 3 blokk sorba van kötve.

.6) Az A és B pontok között a feszültség 18 V , az eredő ellenállás 5Ω .

a) Mekkora áram folyik át a 2Ω -os ellenálláson? **($3,6 \text{ A}$)**
b) Mekkora az R_x ellenállása? **(10Ω)**



a.) Keressünk azonos potenciálú pontokat!
Rajzoljuk át!

Az első ellenállás kivételével a többi egyik vége C , a másik vége B ponthoz van

kötve, emiatt párhuzamosan vannak egymással.

Blokkjukkal sorosan van az első ellenállás, így a blokk ellenállása $5 \Omega - 2 \Omega$.

.7) Mekkora a fogyasztók eredő ellenállása az A és B pontok között az ábra szerinti kapcsolásban? **(1Ω)**

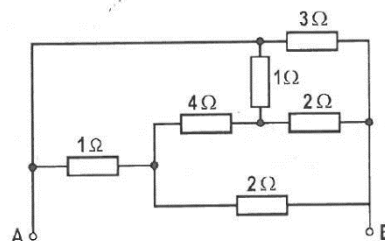
Ötlet1: Rajzoljuk át! Nem egyszerű!

A és B közé van kapcsolva a 3Ω -os.

A és B közé van kapcsolva a jobb felső sarokbeli 1Ω és 2Ω -os soros lánc.

A és B közé van kapcsolva az alsó 1Ω és 2Ω -os soros lánc is.

Rajzoljuk bele ebbe az ábrába az eddig kimaradó 4Ω -ost. Sajnos ez elrontja a vegyes kapcsolást.



DE! Az ugyanaz az AB potenciálkülönbség esik le a középső és alsó 1-2 ágon is, méghozzá ugyanolyan arányba eloszolva az 1 és 2 ohmos fogyasztók között! Ezért A -tól a 4-es ellenállás csatlakozási pontjáig mindkét ágon ugyanakkora a potenciálesés, tehát a 4-es ellenállás végei azonos potenciálúak!

Tehát rajta nem folyik áram, ezért el is hagyhatjuk, elhagyása nem befolyásolja a többi áramkörbeli áramot.

Jól kezelhető vegyes kapcsolás marad vissza.

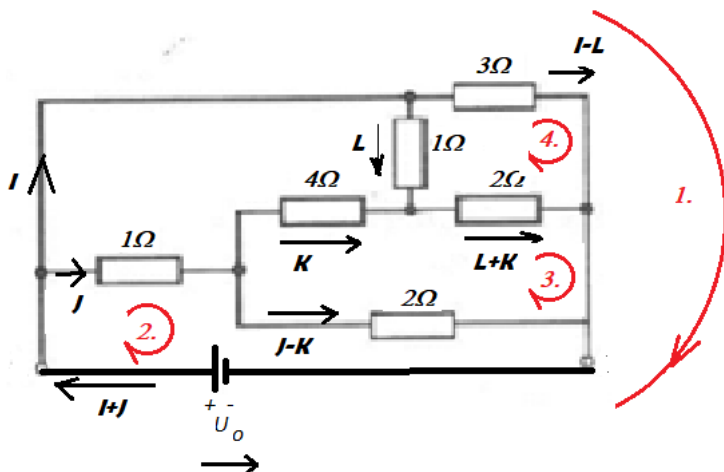
Ötlet2: Ha nem tudjuk ábrázolni, Kirchhoff-törvényeket alkalmazunk. Kössünk A és B pontok közé egy U_0 feszültségű telepet az ábra szerint. Hogy az egyenletrendszerben kevesebb legyen az ismeretlen, az áramok jelölésénél eleve használjuk ki a csomóponti törvényeket.

Négy huroktörvényből lesz 4 egyenlet:

$$\begin{aligned} (1) \quad & 3(I - L) - U_0 = 0 \\ (2) \quad & J + 2(J - K) - U_0 = 0 \\ (3) \quad & 4K + 2(L + K) - 2(J - K) = 0 \\ (4) \quad & 3(I - L) - 2(L + K) - L = 0 \end{aligned}$$

A megoldás: $I = \frac{2U_0}{3\Omega}$, $J = L = \frac{U_0}{3\Omega}$, $K = 0$.

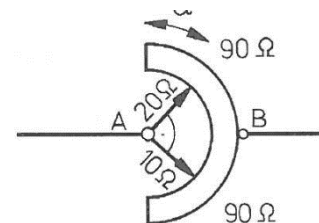
Az eredő ellenállás: $\frac{U_0}{I+J} = 1\Omega$.



.8) Egy félkör alakú, 180Ω -os tolóellenállás felénél B-vel jelölt leágazás van. Az A pont körül elforgatható, két egymásra merőleges, együttmozgó kapcsolókar egyik ága 20Ω , a másik ága 10Ω ellenállású.

a) A merőleges ágakból álló kapcsolókar mely állásánál lesz az AB pontok közötti ellenállás maximális? (50°)

b) Mekkora ez az ellenállás? (30Ω)



A két érintkezési pont közötti ív mindig 90Ω ellenállású, melyet a B leágazási pont két részre oszt.

20Ω és R sorba kötve a felső ágba, illetve 10Ω és $(90\Omega - R)$ sorba kötve az alsó ágba. Az eredő R -nek másodfokú függvénye: $\frac{(R+20\Omega)(100\Omega-R)}{120\Omega}$

A szélsőérték meghatározható teljes-négyzetté alakítással vagy a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséggel, majd R -ből egyenes arányosság adja meg a keresett szöveget.

.9) 12 db R ellenállásból mint élekből kockát állítunk össze.

a) Mekkora az eredő ellenállás egy testátló két végpontja között? ($\frac{5}{6}R$)

b) Mekkora az eredő ellenállás egy lap átlójának két végpontja között? ($\frac{3}{4}R$)

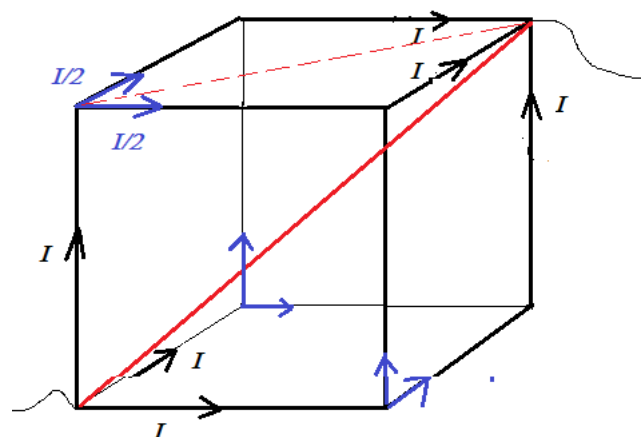
c) Mekkora az eredő ellenállás valamely él két végpontja között? ($\frac{7}{12}R$)

a)

A testátlóra való harmadrendű forgásszimmetria miatt a bemenő áramok egyenlően oszlanak szét, hasonlóan a kimenők is. (I)

Amikor ezek az áramok megérkeznek az él másik végpontjához, ott ismét két egyenlő részre oszlanak, mert az onnan induló két él szimmetrikusan helyezkedik el a testátló és e két él közös csúcsát tartalmazó síkra. ($I/2$). Hasonlóan a többi csúcsoknál is.

A testátló végpontjánál befolyik $3I$ áram, a potenciálkülönbség a testátló végei között pedig $IR + \frac{1}{2}R + IR = \frac{5}{2}IR$, az eredő ellenállás: $\frac{5}{2}IR / (3I)$.



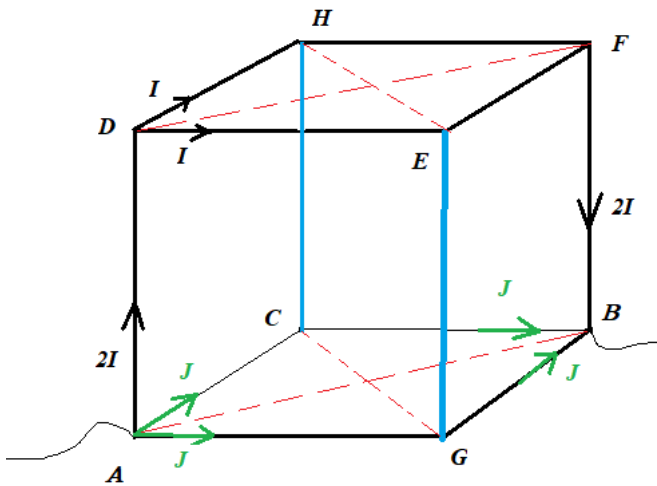
Más ötlet:

Összesen négy különböző potenciálú kockacsúcs van: A belépő csúcs (A), a belépő csúccsal szomszédos csúcsok (szimmetria miatt azonos potenciálúak) (B), a kilépő csúcs (D), és a kilépő csúccsal szomszédos csúcsok (C). Emiatt ábrázolható: A és B között 3db R , B és C között 6 db R , C és D között 3 db R van párhuzamosan kapcsolva. $R/3 + R/6 + R/3 = 5/6 \cdot R$.

.b)

Ötlet1:

- Mivel az elrendezés szimmetrikus az ADFB síkra, ezért az A csúcsnál az alsó lap két élén egyenlő áramok indulnak el, illetve az AD élén induló áram két egyenlő részre oszlik szét a D-ből induló két élén. ($2I$ és J , J)
- A kocka HGE síkra való szimmetriáját kihasználjuk: Ha felcseréljük a telep polaritását, akkor a B pontnál fog befolyjni összesen $I+2J$ áram, és szétoszlik az onnan induló 3 élén. De e 3 él ugyanúgy osztozkodik az áramokon mint az imént az A pontnál lévők, hiszen a kocka geometriája a HEG síkra szimmetrikus. Így B pont felé is $2I$ és J , J áramok folytak.
- Így G pontnál semennyi áram nem indulhat felfelé a GE élén. Hasonlóan CH élén sem. Ezeket el lehet távolítani.



Emiatt DHF és DEF úton is végig I áram folyik.

- Huroktörvény ADEG lapon: $2IR + IR + 0 - JR = 0$, amiből $J = 3I$.

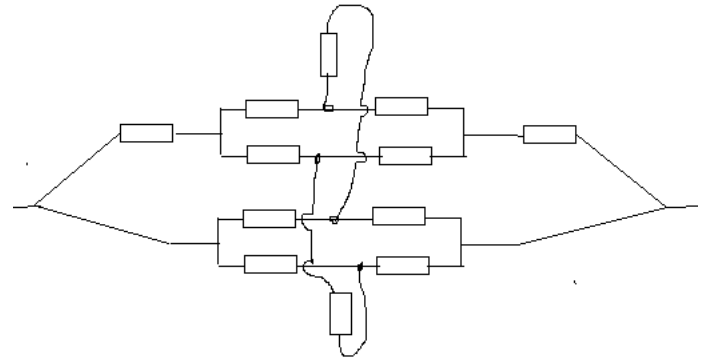
A potenciálkülönbség AGB úton számolva: $U_{AB} = JR + JR = 2JR$. A konzervativizmus miatt így $J = 3I$.

Az eredő ellenállás $R_{AB} = \frac{U_{AB}}{2I + 2J} = \frac{6IR}{8I} = \frac{3}{4}R$.

Ötlet2:

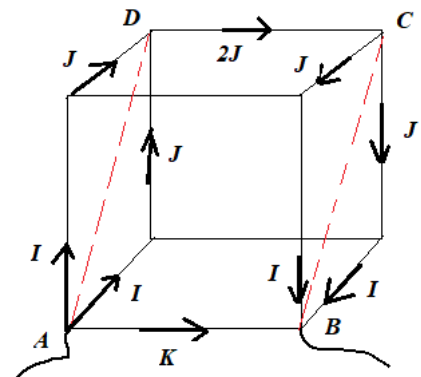
Ha megpróbáljuk átrajzolni, akkor észrevehető a szimmetrikus rajz miatt, hogy G, E, C, H mind ekvipotenciális pontok, hiszen A-tól B felé haladva pontosan „középen” vannak, így az U_{AB} potenciálkülönbségnek éppen a fele esik le A-tól kezdve odáig.

Így ezeket elhagyhatjuk. Ekkor pedig egy könnyen kezelhető vegyes kapcsolást kaptunk.



.c)

- Az ABCD síkra való szimmetria miatt a bal oldallapon az A-ból induló két él és a D-be érkező két él ugyanakkora áramokat hordoz. (I és J)
 - A kocka AB élének szakaszfelező merőleges síkjára való szimmetriája miatt a jobb oldallapon B-be érkeznek I , C-ből indulnak J és J áramok. Így DE élén $2J$ áram folyik.
 - Huroktörvény az első lapon: $IR + (I - J)R + IR - KR = 0$, illetve a felső lapon: $JR + 2JR + JR - (I - J)R = 0$.
- E két egyenlet kapcsolatot teremt a 3 áram között: $I = 5J$ és $K = 14J$.
- Az eredő ellenállás: $R_{AB} = \frac{U_{AB}}{2I + 2J} = \frac{KR}{2I + K}$.



.10) Szabályos testek (tetraéder, kocka, oktaéder, dodekaéder, ikozaéder) élei mentén azonos, R ellenállásokat helyezünk el. Mekkora az eredő ellenállás két szomszédos csúcs között? ($R/2$; $7/12R$; $5/12R$; $19/30R$; $11/30R$)

Alapelvek:

.1) Az AB élre fektetett, a testközépponton átmenő síkra szimmetrikusan elhelyezkedő pontok azonos potenciálúak, a közöttük esetleges éleken át áram nem folyik, így eltávolíthatóak.

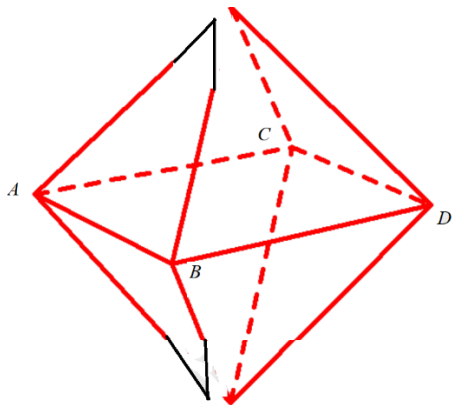
.2) Legyen A csúcs potenciálja $U/2$, B ponté pedig $-U/2$.

Az AB él felező merőleges síkjára való szimmetria miatt a rajta lévő csúcsok mind 0 potenciálúak, a köztük haladó élek elhagyhatóak, avagy a csomópontok két részre is bonthatóak. Továbbá az ezen síkra szimmetrikusan álló éleken az áramerősségek ellentétesek.

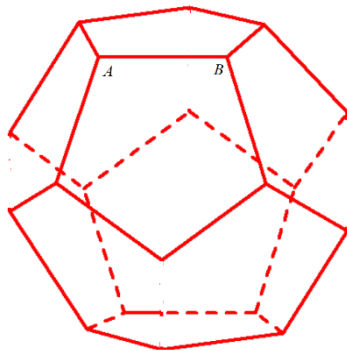
Tetraéder: Az AB élre merőleges él elhagyható, végei azonos potenciálúak. Párhuzamosan van kapcsolva R , $2R$, $2R$.

Kocka: láttuk az előző feladatnál.

Az oktaédernél .2) miatt a felső és alsó csúcsnál szétválasztjuk a csomópontot, így egy jól kezelhető vegyes kapcsolás keletkezik. Benne C és D pontok közötti blokk eredő ellenállása R lesz.



A dodekaédernél



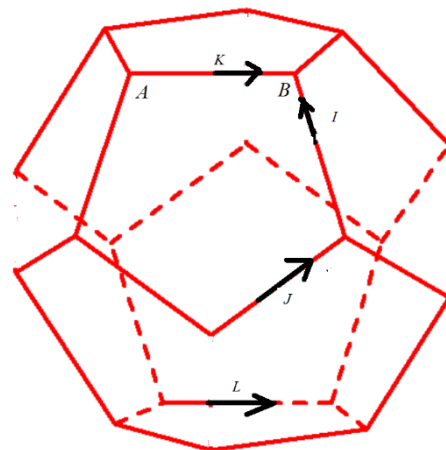
Eltávolítjuk .1) és .2) által érintett éleket.

Ezután a megmaradó, .1) síkra szimmetrikus hálózatban I, J, K, L áramokat veszünk fel az ábra szerinti éleken. A többi élen a szimmetriákat és a csomóponti törvényeket használva felírhatóak az áramok.

Felírunk 3 db huroktörvényt, ami egy 4 ismeretlenes

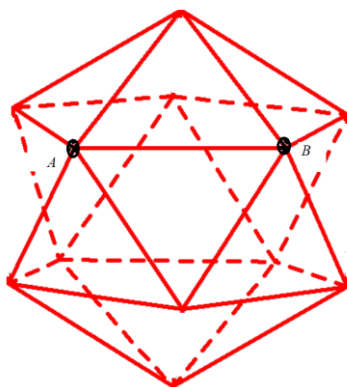
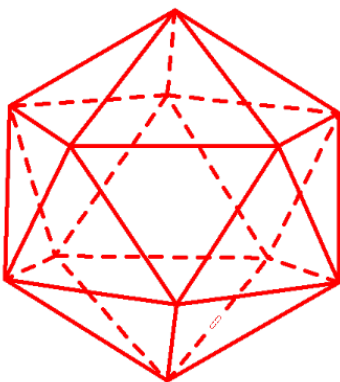
egyenletrendszert ad I, J, K, L között. Oldjuk meg ezt úgy, hogy pl. K -t paraméternek tekintjük. Majd $R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I_{be}} = \frac{KR}{K+2I} = \dots$ az eredő

ellenállás. $\left(I = \frac{11}{38} K; J = \frac{4}{19} K; L = \frac{1}{19} K \right)$

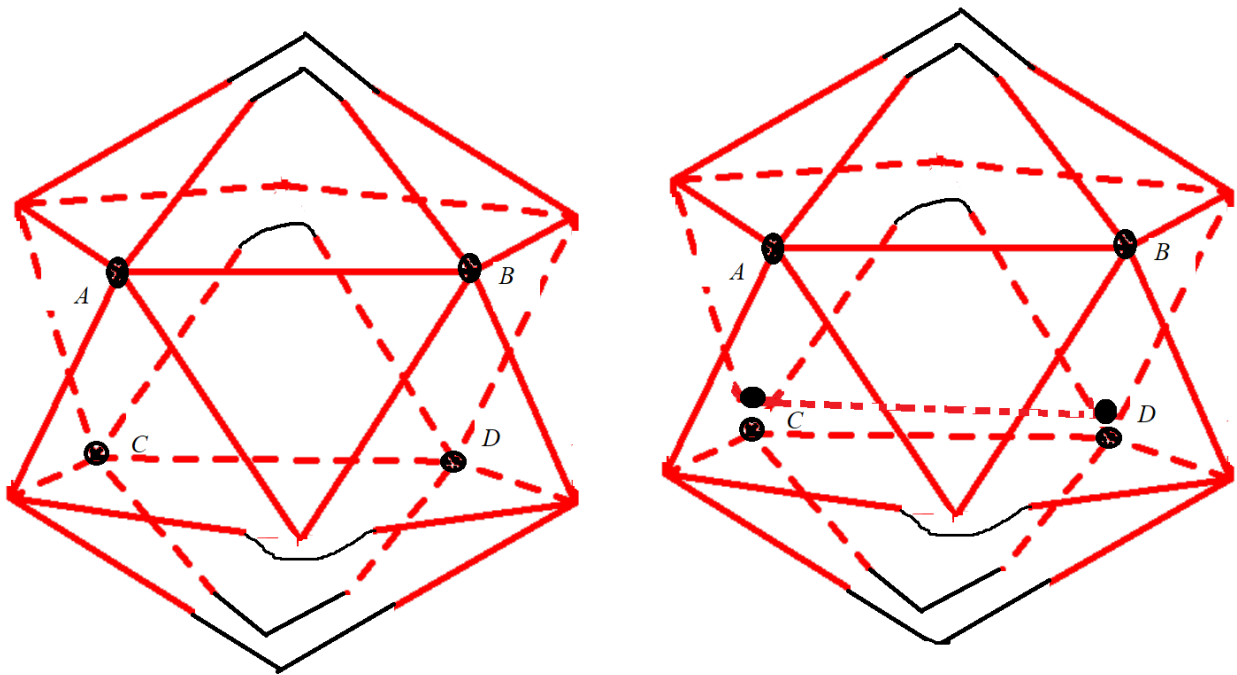


Az ikozaédernél

Először eltávolítjuk .1) és .2) által érintett éleket.

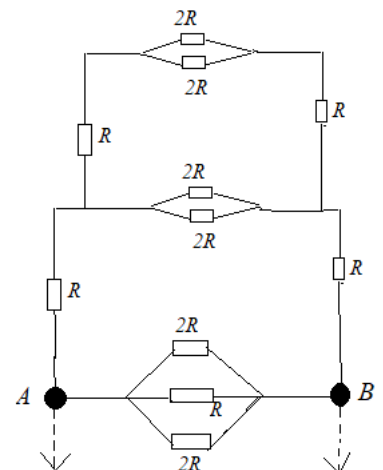


Majd felbontjuk .2) síkra eső csomópontokat:



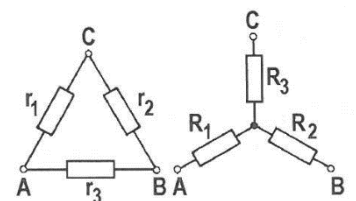
Végül az AB éllel szemközi CD élet „hosszában kettévágjuk”: A CD él R ellenállása helyett két fele akkora keresztmetszetű, $2R$ - $2R$ ellenállású vezetőt elképzelve, a C és D pontoknál két-két külön csomópontot elképzelve. Az .1)-es síkra vonatkozó szimmetriát továbbra is fenntartva, így a többi élen áramával semmiféle változás nem történik.

Ezzel olyan könnyen kezelhető vegyes kapcsolást kapunk, amit soros és párhuzamos elemekből felépíthető és az AB élen átmenő .1) -es síkra szimmetrikus marad. Az eredő ellenállása $11/30R$.



.11) Egy áramkör „delta” kapcsolásban tartalmazza r_1, r_2, r_3 ellenállásokat. Számítsuk ki azokat az R_1, R_2, R_3 ellenállásokat, melyeket „csillag” kapcsolásba elrendezve az előbbivel egyenértékű kapcsolást kapunk, azaz bármely pontpár (AB, BC vagy AC) között mindkét esetben ugyanaz az ellenállás!

$$[R_1 = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}; R_2 = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}; R_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3}]$$



A és B között: $\frac{(r_1 + r_2)r_3}{r_1 + r_2 + r_3} = R_{AB} = R_1 + R_2$. Hasonlóan kapunk másik két egyenletet is.

Az egyenletrendszer megoldása legegyszerűbb, ha mindhármát összeadjuk, és 2-vel osztjuk, majd sorra kivonogatjuk belőle az eredeti egyenleteket.

.12) Mekkora a telep belső feszültsége és belső ellenállása, ha 5Ω , majd 7Ω ellenállást kötve rá 1 A , ill. $0,8 \text{ A}$ áram folyik rajta? ($8,00 \text{ V}$, $3,00 \Omega$)

Ohm törvénye teljes áramkörre, kétszer alkalmazva. $U_o = I(R_k + R_b)$
Egyenletrendszer.

.13) Egy akkumulátor áramkörében 16 V kapcsolófeszültség esetén 2,4 A erősségű áram folyik, rövidzárási árama 48 A. Mekkora az akkumulátor belső ellenállása és belső feszültsége? **(0,351 Ω, 16,8 V)**

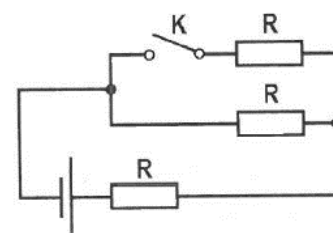
Ohm törvénye teljes áramkörre, kétszer.

Kapocsfeszültség: IR_k rövidzárási áram (nincs külső fogyasztó): $R_k=0$ esetén az áram.

.14) A vázolt áramkörben az R ellenállások 1 Ω értékűek. Ha a K kapcsolót bekapcsoljuk, a telepen átfolyó áram 25%-kal megnő. Mekkora a telep belső ellenállása? **(0,5 Ω)**

Ohm törvénye teljes áramkörre.

Ugyanazon U_o miatt az eredő ellenállás $1/1,25=0,8$ -szersére csökken: $\frac{R+0,5R+R_b}{R+R+R_b} = 0,8$.



.15) Több azonos belső ellenállású, 9 V belső feszültségű telepet először sorosan, majd párhuzamosan kapcsolva 16 Ω ellenállású fogyasztóval terhelünk. Mindkét kapcsolás esetén a fogyasztón átfolyó áram 0,5 A.

a) Mekkora a telepek belső ellenállása? **(16 Ω)**

b) Hány telepet kapcsoltunk össze? **(8)**

Soros telepkapcsolásnál a belső feszültségek és a belső ellenállások is összeadódnak. Párhuzamos kapcsolásnál a belső ellenállás létszamarányosan csökken.

Ohm törvénye teljes áramkörre: először $nU_o = I(nR_b + R_k)$, majd $U_o = I(\frac{1}{n}R_b + R_k)$.

.16) Volframszálaz izzó ellenállása 20 °C-on 35,8 Ω. A szál hőmérsékleti tényezője $4,6 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^\circ\text{C}}$. 120 V-os hálózatra kapcsolva az izzón 0,33 A áram folyik.

a) Mekkora az izzószál hőmérséklete? **(2.010 °C)**

b) Mekkora áram folyik a körben, ha közben nem változna a hőmérséklet? **(3,35 A)**

Az ellenállás hőmérsékletfüggő: $\Delta R = R_{20}(1 + \alpha \Delta t)$.

.17) 20 Ω ellenállású ampermérő mutatójának végkitérése 3 mA áramerősséget jelent. A skálán 15 skálaosztás van.

a) Mekkora áramot jelent egy skálaosztás? **(0,2 mA)**

b) A műszerrel 10 Ω-os ellenállást kapcsolunk párhuzamosan. Mekkora a műszeren és a 10 Ω-os ellenálláson összesen átfolyó áram erőssége, ha a mutató 5 skálaosztást tér ki? **(3 mA)**

5 osztás miatt 1 mA folyik a műszeren,

Párhuzamos kapcsolásnál a feszültség azonos az ágakon.

.18) Sorba kapcsolt 2 mm² keresztmetszetű réz- és vasvezetékben 12 A erősségű áram folyik. A réz fajlagos ellenállása $0,017 \cdot 10^{-6} \Omega\text{m}$, a vasé $0,600 \cdot 10^{-6} \Omega\text{m}$.

a) Mekkora az elektromos térerősség a réz- és a vasvezeték belsejében? **(3,60 V/m, 0,102 V/m)**

b) Az L hosszúságú rézhuzalt párhuzamosan kapcsolva az $\frac{L}{2}$ hosszú vashuzallal, a rézben $0,2 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ a térerősség.

Keresztmetszeteik ismeretlenek. Mekkora a térerősség a vashuzal belsejében? **(0,4 V/m)**

c) Az elemi töltés hányszorosa halmozódik fel vas és réz érintkezési felületén az a) esetben? És ha az áramot 0,012 A-ra csökkentjük? **(386; 0,386?)**

a) A differenciális ohm-törvény szerint a térerősség, az áramsűrűség és az anyagi minőség összefügg: $E = \left(\frac{U}{l} = \frac{RI}{l} = \rho \frac{LI}{Al} = \right) \rho j$.

b) Röviden: $E = \frac{U}{l}$, és párhuzamos kapcsolásnál a feszültségük közös.

Hosszabban: $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\rho_1 j_1}{\rho_2 j_2} = \frac{\rho_1 l_1 A_2}{\rho_2 l_2 A_1} = \frac{\rho_1 U/R_1 A_2}{\rho_2 U/R_2 A_1} = \frac{\rho_1 R_2 A_2}{\rho_2 R_1 A_1} = \frac{\rho_1 \frac{\rho_2 l_2}{A_2} A_2}{\rho_2 \frac{\rho_1 l_1}{A_1} A_1} = \frac{l_2}{l_1}$.

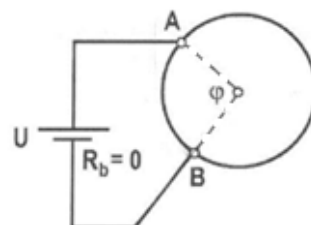
.c) Gauss-törvényt használjunk úgy, hogy az érintkezési felületet belefoglaljuk egy hengerbe, melynek alaplapjai párhuzamosak vele. A térerősség ugrása miatt a hengerben töltés halmozódik fel: $Q_{fel} = \epsilon_0 A \Delta E$.

Ha ez az elemi töltésnél kisebbre adódik, akkor az ellentmond a golyónak képzelt, a töltését osztani nem tudó elektron képének, illetve a az „ott van az elektron/nincs ott az elektron a felületen” kétállású lehetőségnek. Mindez sejteti azt, hogy az elektront nem mindig lehet töltött golyónak elképzelni. (ld.: későbbi tanulmányok)

.19) $R = 4 \Omega$ ellenállású huzalt kör alakúra hajlítunk és összeforrasztunk. Az így kapott körhöz az A rögzített sarunál $U = 3 \text{ V}$ -os telep egyik sarkát, a B csúszósarunál a telep másik sarkát kapcsoljuk.

.a) Mekkora a telep árama ha a B csúszósaru 90° -ra van az A sarutól? (4 A)

.b) B saru melyik állásánál lesz a telep áramerősség a legkisebb, és mekkora ez az áramerősség? (180° -nál, 3 A)



.a) A szög arányos az ívhosszal, az pedig az ellenállással.

A és B a kört 1ohm és 3 ohm -os részekre osztja, amik párhuzamosan vannak kapcsolva.

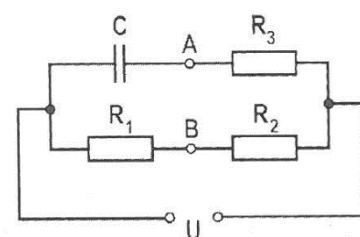
.b) A legnagyobb eredő ellenállás kell, miközben R_1 és R_2 összege fix. $R_e = \frac{R_1 R_2}{4\Omega}$.

A szorzat a legnagyobb, ha a tényezők egyenlők (számtani és mértani közép), avagy R_1 -re másodfokú, teljes négyzetté alakítással adódik a szélsőértéke.

.20) Az ábrán látható kapcsolásban $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $U = 60 \text{ V}$. Mekkora feszültség van az A és B pontok között? (40 V)

R_3 ellenálláson nem folyik áram, mert a kondenzátor szakadásként viselkedik egyenárammal szemben. Így R_3 végpontjai között nincs feszültség. Ezért A pont potenciálja az R_2 jobb végének potenciáljával egyezik.

Az alsó ágba a feszültségek az ellenállások arányában oszlanak el.

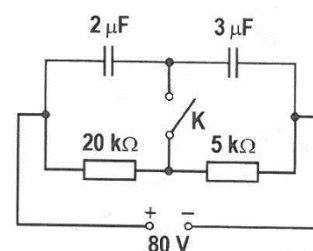


.21) Az ábrán látható elrendezésben határozzuk meg nyitott K kapcsolónál:

a) az egyes ellenállásokon a feszültséget, (64 V, 16 V)

b) az egyes kondenzátorokra jutó feszültséget, és az egyes kondenzátorok töltését, (48 V, 32 V, 96 μC)

c) Zárjuk a K kapcsolót! Mennyi töltés halad át rajta? (80 μC)



.a) Elegendően sok idő múlva áram csak az ellenállásokon folyik (a kondenzátoros ágba csak a legelőször, rövid ideig, amíg a kondenzátorok feltöltődnek).

A felső ágba két sorba kapcsolt kondenzátorra esik 80 V. Töltésük közös.

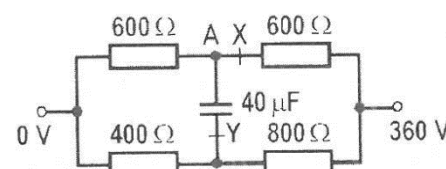
.b) Kezdetben a kondenzátorok egymással összekötött lemezei az összekötő vezetékkel együtt semleges volt.

Zárás után mindegyik kondenzátor az alatta lévő ellenállással lesz párhuzamosan kapcsolva, így feszültségeik 64V és 16 V. A bal kondenzátor jobb lemezén $-128 \mu\text{C}$, a jobb kondenzátor bal lemezén $+48 \mu\text{C}$ töltés lesz.

Tehát az eredeti semleges fém $-80 \mu\text{C}$ töltésű lett, felülről $80 \mu\text{C}$ eltávozott (elektronok alulról felülre).

.22) Mennyi töltés megy át az ábra szerinti elrendezésben Y-nál, ha a vezeték X-nél megszakítjuk? (7,2 mC)

Y pont potenciálja 120 V, az X pont potenciálja 180 V, így a kondenzátorra 60 V esett. Alsó lemezén $-60\text{V} \cdot 40\mu\text{F}$ töltés volt. (negatív!)



Ha X-nél a felső ág megszakad, az áram leáll, A pont 0 V potenciálú lesz, a kondenzátoron eső 120 V feszültség miatt az alsó lemezen $+120V \cdot 40\mu F$ lesz. (pozitív!)

Tehát az Y-nál átáramló töltés $180V \cdot 40\mu F$, amit alulról felfelé haladó áram szállít.

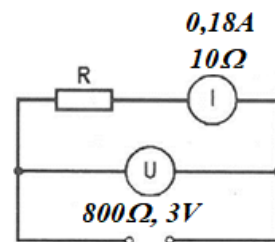
.23) Az ábra szerinti kapcsolásban ellenállást mérünk. A $10\ \Omega$ ellenállású árammérő és a $800\ \Omega$ ellenállású feszültségmérő 0,18 A-t és 3 V-t mutat.

Mekkora az ismeretlen ellenállás? (**6,67 Ω**)

Az ampermérőre eső feszültség számolható.

A voltmérő feszültsége szétoszlik a felső ágba a két ellenállás között.

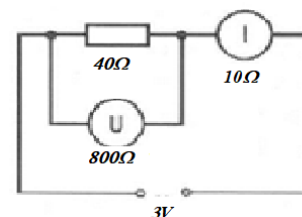
Ohm törvénye.



.24) $40\ \Omega$ ellenállást 3 V-os áramforrásra kapcsolunk, üzemi adatait a rajz szerinti kapcsolásban $10\ \Omega$ ellenállású árammérővel és $800\ \Omega$ ellenállású feszültségmérővel mérjük.

.a) Mit mutatnak a műszerek? (**62,4 mA, 2,38 V**)

.b) Mekkora hibával kapjuk az ellenállást, ha azt a mért adatokból Ohm-törvényével számoljuk? (**4,65%**)



.a) A párhuzamos blokk ellenállás és az ampermérő ellenállásának arányában oszlik meg a telep feszültsége. A blokkra jutó részt mutatja a feszültségmérő.

A másiktól adódik a mért áram.

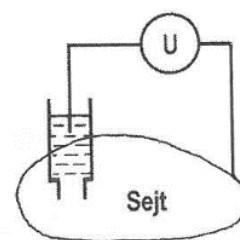
.b) A mért értékekből számolt ellenállás: 38,1 ohm.

.25) Egy sejt belsejébe kapillárisban végződő elektródát szúrunk, a másik elektródát a sejt felületére helyezzük. Az elektródák között feszültség (membránfeszültség) lép fel.

Adott esetben az $1\ M\Omega$ belső ellenállású műszer 25 mV feszültséget mutat. A kapilláris és a műszer ellenállása mellett minden egyéb ellenállás elhanyagolható.

.a) Mekkora a membránfeszültség valódi értéke (elektromotoros erő), ha a beszúrt kapilláris hossza $5 \cdot 10^{-6}\ m$, átmérője $5 \cdot 10^{-7}\ m$ és $10^5 \frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$ fajlagos ellenállású káliumkloriddal van töltve? (**88,7 mV**)

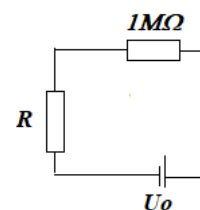
.b) Mekkora belső ellenállású műszert kell alkalmazni ahhoz, hogy a műszer által mutatott feszültség legfeljebb 20%-kal térjen el a membránfeszültség valódi értékétől? (**legalább 10,2 M Ω**)



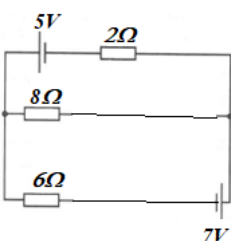
.a) A kapilláris ellenállása számolható (2,55 M Ω). Ebből a kapilláris feszültsége is (=egyenes arányosság). A két feszültség összeadódik.

.b) $\frac{U_o - U_m}{U_o} \leq 0,2$ szükséges, azaz $0,8U_o \leq U_m$.

A műszer a rajta átfolyó áram hatására mutatja a saját belső ellenállásán eső feszültséget, azaz $U_m = IR_b = \frac{U_o}{2,55M\Omega + R_b} R_b$. Az egyenlőtlenség megoldható R_b -re.

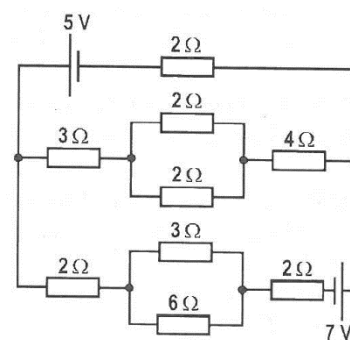


.26) Mennyi hő fejlődik másodpercenként a $4\ \Omega$ -os ellenálláson? (**0,177 J**)

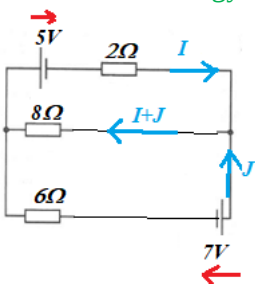


Némileg egyszerűbb lesz, ha összevonunk ellenállásokat. Kérdés a 8 ohmos ellenállás árama lesz:

A két telep problémája kétféleképpen kezelhető:....
....Kirchhoff törvényekkel:



Az áramokat bárhogy felvehetjük, de lehetőleg keveset vegyünk fel a csomóponti törvényeket eleve felhasználva, mert akkor kevesebb egyenlet lesz. Figyeljünk a telepek polaritására!



$$5V + I \cdot 2\Omega + (I + J)8\Omega = 0$$

$$(I + J)8\Omega + J \cdot 6\Omega - 7V = 0$$

Megoldás: $J = \frac{55}{38} A = 1,45A$, $I = -\frac{63}{38} A = -1,66A$, a keresett áram, az eredeti 4 ohmos ellenálláson át: $I + J = -\frac{8}{38} A = -0,21 A$.

Mivel az eredeti I , J áramirányokat találmorra vettük fel, ezért néhol negatív áramot kaptunk, ami az eredetileg felvett iránnyal ellentétes áramot jelent.

Tehát az áramok a felső, középső és alsó ágban: **balra** $\frac{63}{38} A$; **jobbra** $\frac{8}{38} A$ és **jobbra** $\frac{55}{38} A$.

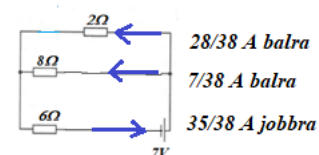
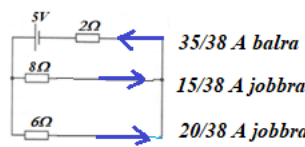
....szuperpozícióval:

Az egyenáramot mozgató elektrosztatikus teret a két telep együtt hozza létre. Kiszámoljuk a kör áramait úgy, hogy előbb csupán az egyik telepet tartjuk benne, a másik helyett egy vezetőt képzelünk, majd fordítva, ezután pedig a két áramrendszert helyről-helyre szuperponáljuk.

A két segédábra és benne az áramok:

Ezek szuperpozíciójaként az eredeti 4 ohmos ellenállás árama: a felső, középső és alsó ágban:

balra $\frac{63}{38} A$; **jobbra** $\frac{8}{38} A$ és **jobbra** $\frac{55}{38} A$.



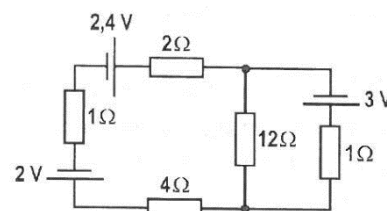
A másodpercenként fejlődő hő a teljesítményből: $P = I^2 R = \left(\frac{8}{38} A\right)^2 4\Omega = 0,177 W$.

Megjegyzés: A szuperpozíciós módszer nem igényel egyenletrendszer-megoldást és Kirchhoff-törvényeket, csupán több időt, de általános iskolás korosztályban is alkalmazható.

.27) Mekkora az áramerősség a 12Ω -os ellenálláson? (**0,2 A**)

Több telep: Szuperpozíció vagy Kirchhoff-törvények. (ld.: előző feledatnál)

A bal félkör 3 db ellenállása összevonható.



.28) Az ábrán látható kapcsolásban az áramforrások belső feszültsége $U_{01} = 2 V$,

$U_{02} = 5 V$, $U_{03} = 6 V$, az ellenállások $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$.

.a) Mekkora az R_3 ellenállás, ha a K kapcsoló nyitott és zárt helyzetében a voltmérő ugyanazt a feszültséget mutatja? (**12 Ω**)

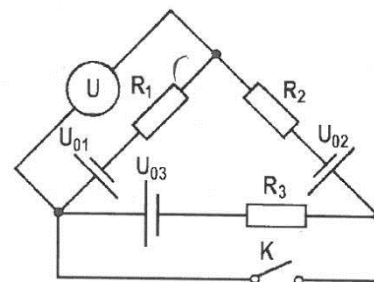
.b) Mekkora feszültséget mutat a voltmérő? (**1 V**)

.a) Nyitott állásnál nincs elágazás, az ellenállások és a telepek összevonhatók (ügyelve a polaritásra): $5V + 6V - 2V$ feszültségű telep *negatív* körüljárású áramot hajt: $I = 9V / (6\Omega + R_3)$.

A műszer által mutatott érték: $U_{AB} = 2V + 2\Omega \cdot 9V / (6\Omega + R_3)$. (A pont az alsó, B pont a felső csatlakozási pont.)

Zárt kapcsolónál (gondoljunk a „szuperpozíció”-s módszerre) a felső két telep együtt és tőle függetlenül az alsó telep is a kapcsoló 0 ellenállású, rövidrezáró ágán hajtja a saját áramát, nem befolyásolva a másik áramát. Ekkor a felső két telep által hajtott áram *negatív* körüljárású és $I = (5V - 2V) / 6\Omega = 0,5 A$.

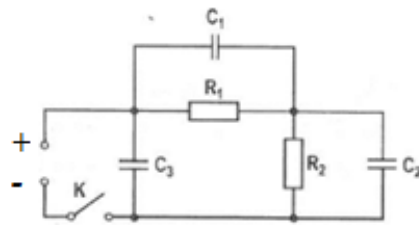
Ezért a mért feszültség $U_{AB} = 2V + 2\Omega \cdot 0,5A = 3V$.



.29) Az ábra szerinti kapcsolásban minden ellenállás $100\ \Omega$, és minden kapacitás $5\ \mu F$. A K kapcsoló zárt állása mellett mindkét ellenálláson állandó $1\ A$ erősségű áram folyik.

a) Mekkora a kondenzátorokban tárolt energia? (**25 mJ, 25 mJ, 100 mJ**)

b) Mekkora töltés halad át a K kapcsoló nyitása után az R_2 ellenálláson, a kondenzátorok teljes kisüléseiig? (**1,5 mC**)



a) A telep által (csak) az ellenállásokon keresztül hajtott áram miatt az ellenállásra *párhuzamosan* kapcsolt kondenzátorok feszültsége $100\ V$ lesz, C_3 -é pedig $200V$.

b) A kapcsoló nyitása a kondenzátorlemezeken töltést hagy. A kondenzátorok kisülnek C_1 az R_1 -en át, C_2 az R_2 -n át, C_3 pedig az $R_1 + R_2$ -en át. A töltésáramlások iránya a lemezek kezdeti polaritásától függ. Így R_2 -n át a C_2 kisülésekor felülről lefelé $0,5\ mC$, majd C_3 kisülésekor ismét felülről lefelé $1\ mC$ áramlik át.

.30) $150\ MW$ teljesítményű erőműre kapcsolt távvezeték saját ellenállása $30\ \Omega$.

Hány százalékos az energiavesztés a távvezetéken, ha az erőmű a távvezeték bemenetére $750\ kV$ avagy $150\ kV$ feszültséget szolgáltat? (**0,8%, 20%**)

A generátor P teljesítménye és a kivezetések közötti U feszültség meghatározza a távvezetéken folyó áramot: $I = P/U$. Ez az áram a vezeték ellenállásán elvesző teljesítményvesztést hoz létre: $P_{veszt} = I^2 R_{vez}$.

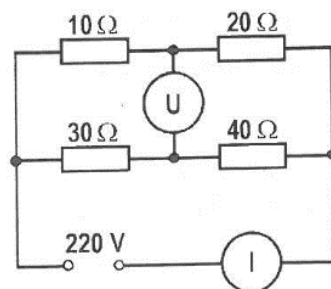
A veszteségarány: $\frac{P_{veszt}}{P} = \dots = \frac{P R_{vez}}{U^2}$. Ezért nagy feszültségűek a távvezeték.

.31) Négy ellenállást, egy ampermérőt és egy voltmérőt az ábra szerint kapcsoltunk $220\ V$ -ra.

a) Mekkora áramot jelez az ampermérő? (**10,48 A**)

b) Mekkora feszültséget mérünk a voltmérővel? (**20,95 V**)

c) A hálózatról felvett teljesítmény hány százaléka jut a $10\ \Omega$ -os ellenállásra? (**23,33%**)



a) Eredő ellenállásból számoljuk.

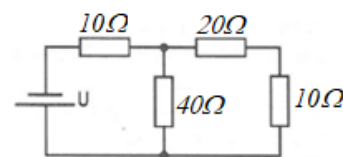
b) A baloldali csomóponttól mennyit esik a potenciál a felső ágban és az alsó ágban a voltmérőig?

c) A *felső és alsó ágak teljesítményaránya* az az azonos feszültség miatt ($P = U^2/R$) az ágak eredő ellenállásaival fordítottan arányos: $70:30$.

A *felső ágba* jutó teljesítmény a fogyasztók között az azonos áram miatt az *ellenállások arányában* oszlik meg. ($P = I^2 R$): $10:20$.

Tehát $\frac{70}{100} * \frac{10}{30} = \frac{7}{30}$.

.32) Mekkora a telep kapocsfeszültsége ha a $40\ \Omega$ ellenállás felvett teljesítménye $40\ W$ (**63,3 V**)



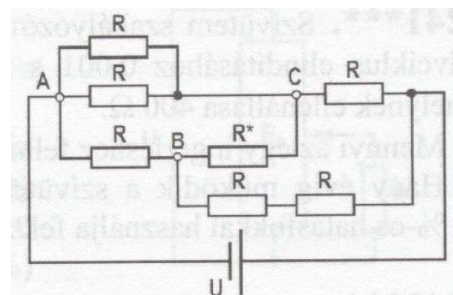
A teljesítményből a $40\ \Omega$ ohmos fogyasztó feszültsége számítható, ami egyben a teljes párhuzamos blokké is.

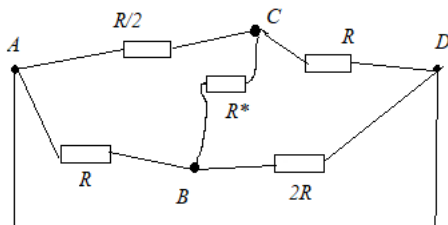
A $10\ \Omega$ ellenállás és a vele sorba kapcsolt blokk eredő ellenállása között a feszültség ellenállásarányosan eloszlik.

.33)

a) Mekkora az ábrán látható hálózat fogyasztása, ha minden egyes ellenállás értéke $R = 92,5\ \Omega$, a rákapcsolt telep feszültsége pedig $26\ V$? (**7,31 W**)

b) Hogyan változik meg a felvett teljesítményű, ha R^* ellenállás értékét $4,27$ -szorosára növeljük, ill. csökkentjük? (-)





Nyilván, az eredő ellenállást kellene kiszámolni, hogy a főág árama kiderüljön.

Az áttekinthetlenség miatt próbálkozzunk átrajzolni. Előbb A, B, C, D pontokat rajzoljuk fel, majd ezek közé berajzolni az ellenállásokat. Bizonyosakat célszerű összevonni és az eredőjükkel helyettesíteni.

Ez egy kiegyenlített Wheatstone-híd! Fent ugyanaz az ellenállásarány mint az alsó ágban, így B és C ekvipotenciális. Mit tegyünk ezért az R^* ellenállással?

.34) 125 V, 500 W névleges adatokkal rendelkező izzólámpát 220 V feszültségű hálózatról kell táplálni.

a) Mekkora előtét-ellenállást kell alkalmazni? (**9,18 Ω**)

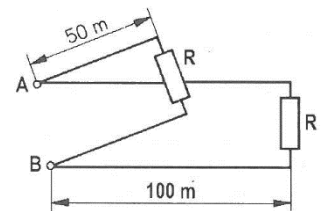
b) Mekkora lesz az előtétellenálláson fejlődő teljesítményveszteség? (**380 W**)

Sorba kell kapcsolni vele egy akkora ellenállást, hogy az izzóra csak 125 V jusson.

Soros kapcsolásnál a feszültség szétoszlik az ellenállások között.

.35) A közös AB csatlakozóról két fogyasztót táplálunk, amelyek mindegyike 220 V feszültségnél 5 kW teljesítményt fogyaszt. Az 50 m távolságra levő fogyasztó kapcsain 220 V feszültséget mértünk. Az alumíniumhuzalból készült vezeték keresztmetszete 8 mm², fajlagos ellenállása $0,026 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$.

Mekkora a feszültség a 100 m távolságra levő másik fogyasztó kapcsain? (**213 V**)



R adott, és 100 m hosszú vezeték ellenállása (r) számolható.

Az U_{AB} feszültségből a közelebbi fogyasztó (soros kapcsolás R és r között) $U_{AB} \cdot \frac{R}{R+r} = 220 \text{ V}$ -ot kap.

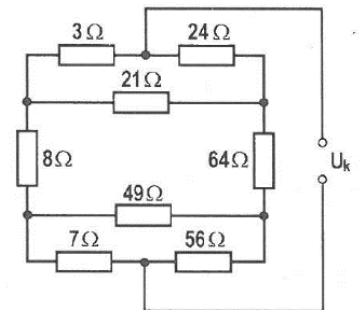
Mennyit kap U_{AB} -ből a távolabbi ellenállás? Szintén feszültségosztással: $U_{AB} \cdot \frac{R}{R+2r} = ?$

.36) Mekkora teljesítményt vesz fel az ábra szerinti kapcsolás 24 V kapocsfeszültség esetén? (**36,0 W**)

3:8:7 az ellenállásarány a bal félkörön, és 24:64:56 a jobb félkörön.

Koncentráljunk ezen ágakban a csomópontok potenciáljaira.

avagy: Kirchoff-törvények



.37) U_o belső feszültségű, R_b belső ellenállású telepre R ellenállást kapcsolunk.

Milyen R érték mellett a legnagyobb az ellenállásra jutó teljesítmény? (**$R = R_b$**)

A fizika: Ohm törvénye teljesáramkörre.

Az áram: $I = \frac{U_o}{R+R_b}$, emiatt a külső ellenálláson a teljesítmény: $P = I^2 R = \dots = \frac{R}{(R+R_b)^2}$ maximuma kell.

Innentől matematika...

Ötlet1: Mivel pozitív, ezért $\frac{(R+R_b)^2}{R}$ minimális, azaz $R + \frac{R_b^2}{R} + 2R_b$ minimális, miközben R_b fix.

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti összefüggést R és $\frac{R_b^2}{R}$ tagokra.

Ötlet2: $\frac{(R+R_b)^2}{R} = \frac{(R-R_b)^2}{R} + 4 R_b$ mikor lesz minimális?

.38) Rézszulfát oldatot tartalmazó elektrolitot sorba kapcsolunk 2,8 Ω ellenállású elektromos melegítővel, amely 350 g vizet tartalmazó kaloriméterbe merül. A kaloriméter hőkapacitása 200 $\frac{\text{J}}{^\circ\text{C}}$. A réz relatív atomtömege 63,5, vegyértéke 2. Ha 10 perc alatt 0,86 g réz válik ki az egyik elektródán, hány fokkal lesz melegebb a víz a kaloriméterben fél óra alatt? (**57,4 $^\circ\text{C}$**)

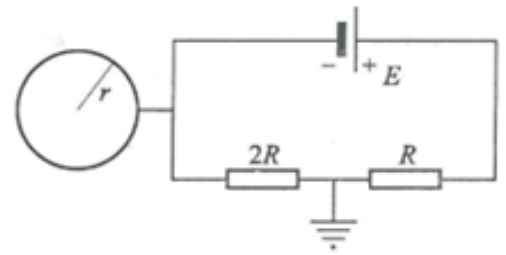
1 db rézion semlegesítését 2 db elektron végzi. Az odaáramló elektronok áramot képvisenek.

A kivált tömegből a rézatomok számát, abból az elektronok számát, abból azt átvitt töltést, ebből az áramot számolhatjuk.

Az áram az ellenálláson Joule-hőt szabadít fel, ami a vizet és a kalorimétert melegíti.

.39) *Fémgömb az ábrán látható áramkörre van kapcsolva. Ismert az áramforrás E elektromos ereje és R_b belső ellenállása, az R ellenállás értéke és a gömb r sugara. A gömb az ϵ_r relatív permittivitású közegben található. Mekkora a gömbön felhalmozódó elektromos töltés?

$$\left(-8\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{R}{3R+R_b} rE\right)$$



Előbb a körbeli áramot számoljuk ki.

Majd az áramkör gömbhöz csatlakozó pontjának potenciálját, figyelembe véve a földelés helyét.

A gömb potenciáljából következtessünk a felszíni töltésre (Vigyázat, szigetelőközeg!)

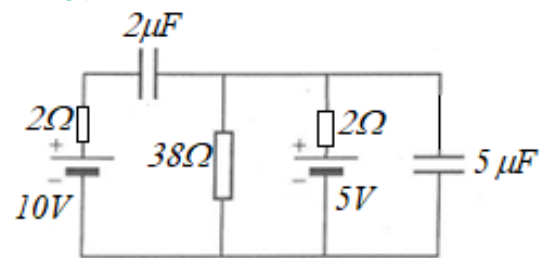
.40) Az ábrán látható áramkörben mennyi töltés halmozódik fel a kondenzátorokon? ($-10,5 \mu\text{C}$ és $9,5 \mu\text{C}$)

Merre folyik az áram az áramkörben? Mekkora nagyságú?

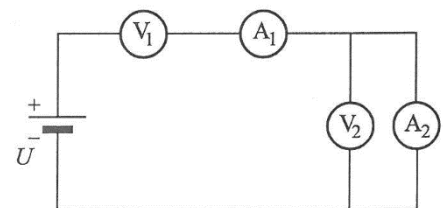
(A kondenzátor szakadásként viselkedik.)

Mekkora a potenciálkülönbség a kondenzátorlemezek között?

(Ha egy ellenálláson nem folyik áram, rajta nem is esik a potenciál.)



.41) *Az ábrán látható áramkörben két azonos milliampermérő, valamint két azonos voltmérő van. A sorosan kötött műszerek $0,26 \text{ V}$ -ot, ill. 1 mA -t jeleznek, a 2. milliampermérő pedig $0,75 \text{ mA}$ -t. Határozza meg a mérőműszerek ellenállását és az áramforrás sarkain a feszültséget! (**412 mV**)



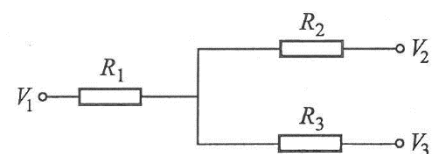
Az 1. voltmérő ellenállása számolható.

A párhuzamos blokk ágai között szétosztó áramból a második voltmérő árama adódik, majd a feszültsége.

A párhuzamos blokk eredő ellenállásából az ampermérő ellenállása.

A telep feszültsége a főág műszerein és a blokkon eső feszültség összege.

.42) Az ábrán egy elektromos hálózat egy része látható. Ismertek: $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$ ellenállások és a $V_1 = 10 \text{ V}$, $V_2 = 9 \text{ V}$, $V_3 = 6 \text{ V}$ potenciálok. Mekkora az egyes ellenállásokon átfolyó áramok erőssége? (**1A , 0A , 1A**)



Haladjon a felső ágban I , az alsóban J , így a főágban $I+J$ áram balról jobbra.

Két egyenlet adódik a potenciálesésekre:

$$(I+J)R_1 + IR_2 = V_1 - V_2 \text{ és}$$

$$(I+J)R_1 + JR_3 = V_1 - V_3. \text{ Numerikusan nagyon könnyű megoldani.}$$

.43) **

a) Kocka élhálózatát azonos, R ellenállásokból készítjük el.

Azt szeretnénk, ha a kocka egyik csúcsánál bevezetett I áram a többi csúcsoknál egyenlően szétosztva folyna ki.

Mekkorák legyenek a kifolyó áramoknál a kockacsúcsok potenciáljai, ha a befolyó áramnál a csúcs potenciálja 0?

$$\left[-\frac{7}{21}IR; -\frac{9}{21}IR; -\frac{10}{21}IR\right]$$

b) Ugyanez a feladat a többi szabályos testre is.

[tetraéder: $-\frac{1}{3}IR$] [oktaéder: $-\frac{1}{4}IR$; $-\frac{9}{20}IR$]

[dodekaéder: $-\frac{19}{57}IR$; $-\frac{27}{57}IR$; $-\frac{32}{57}IR$; $-\frac{34}{57}IR$; $-\frac{35}{57}IR$] [ikosaéder: $-\frac{11}{55}IR$; $-\frac{14}{55}IR$; $-\frac{15}{55}IR$]

.a) Kockánál 3 részre oszlik a befolyó áram, ahova ezek megérkeznek az ottani csúcs potenciálja $-\frac{1}{3}IR$.

Itt kifolyik csúcsonként $I/7$ áram, majd ezen csúcsból továbbhalad (egyenlő nagyságú) két $\frac{1}{2}\left(\frac{I}{3} - \frac{I}{7}\right) = \frac{2}{21}I$ áram, miközben az élen a potenciál csökken és végül $-\frac{1}{3}IR - \frac{2}{21}IR = -\frac{9}{21}IR$ lesz.

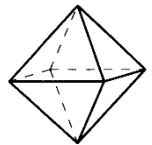
Itt kifolyik $I/7$, marad $\frac{1}{21}I$, három ilyen találkozik az utolsó csúcsban. Így a potenciál szintén $-\frac{1}{21}IR$ értékkel esik tovább: $-\frac{10}{21}IR$.

.b)

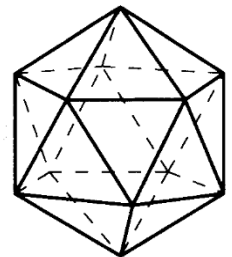
Tetraédernél egyenlően oszlik szét a befolyó áram, a többi csúcs potenciálja $-\frac{1}{3}R$, itt lépnek ki az áramok.

Oktaédernél a felül befolyó, 4 részre oszló áram a következő csúcsoknál azonos, $\frac{1}{4}IR$ potenciált hoz létre, így az ezen csúcsokat összekötő éleken nem folyik áram, ezek elhagyhatók.

Továbbhaladás előtt azonban ezen csúcsoknál eltávozik $I/5$ áram. Tovább csak $\frac{1}{4}I - \frac{1}{5}I = \frac{1}{20}I$ folyik. Ezek egyesülnek az utolsó csúcsnál (és kifolynak $I/5$ áramként). Az itteni potenciál: $-\left(\frac{1}{4}R + \frac{1}{5}R\right)I = -\frac{9}{20}IR$.



Állítsuk az ikosaédert az asztalra, hogy a befolyó csúcs a legmagasabban legyen, a belőle induló testátló pedig függőleges lesz. A kifolyó áramoknál lévő 11 csúcs összesen 3 vízszintes sík mentén helyezkednek el, lefelé haladva rendre 5, 5, 1 csúcs van e síkokon. Egy síkon lévő pontok ekvipotenciálisak a testátló miatti 5-ödrendű forgásszimmetria miatt, ezért a síkokban fekvő éleken nem folyik áram, elhagyhatók.



Az **első síkra** 5 él mindegyikén $1/5 \cdot I$ áram érkezik, így a potenciálok $-1/5 \cdot IR$.

E csúcsokban kifolyik összesen $5/11 \cdot I$ áram, az alább lévő sík irányába továbbmegy $6/11 \cdot I$ de ezt csak a két sík között lévő 10 él viszi, élenként $6/110 \cdot I$ folyik, azaz a potenciál $6/110 \cdot IR = 3/55 \cdot IR$ -nyit esik.

Így a **második síkon** $(-1/5 - 3/55)IR = -14/55 \cdot IR$ a potenciálok.

A **legalsó ponthoz** összesen az itt kifolyó $1/11 \cdot I$ áram érkezik csak, minden élen $1/55 \cdot I$, így további $1/55 \cdot IR$ potenciálesés miatt itt a potenciál: $-15/55 \cdot IR$.

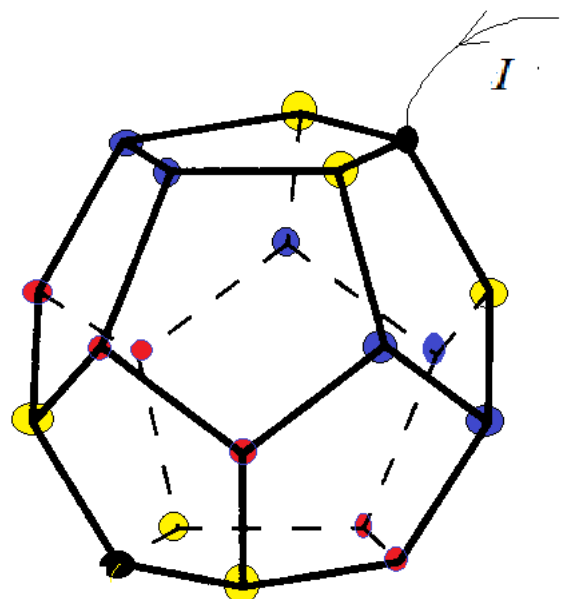
A dodekaéder is képzeljük el testátlójával merőlegesen az asztalra (az ábrával ellentétben), legfelül folyjon be az I áram. A maradék 19 csúcs a testátlóra merőleges 5 síkokon van, rendre lefelé haladva 3 db sárga, 6 db kék, 6 db piros, 3 db sárga, 1 db fekete csúcs.

A befolyó ponttól lefelé az **1. (sárga) síkra** lejutó I áramot 3 él viszi, e végpontok potenciálai: $-1/3 \cdot IR = -19/57 \cdot IR$.

E síkon kifolyik összesen $3/19 \cdot I$ áram. A sárga síktól a **2. (kék) síkra** lépő, $16/19 \cdot I$ áramot 6 él viszi, élenként $8/57 \cdot I$ folyik. Ezért a **2. (kék) síkon** a potenciálok: $-1/3 \cdot IR - 8/57 \cdot IR = -27/57 \cdot IR$.

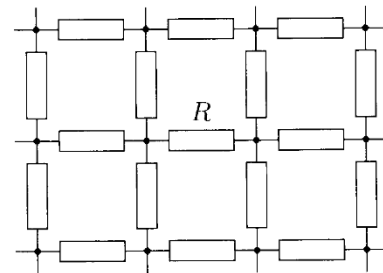
A **3. (piros) síkra** csak $I - (3+6)/19 \cdot I = 10/19 \cdot I$ áram jut, amit 6 él szállít oda, élenként $5/57 \cdot IR$ potenciálesés mellett. Így a piros sík potenciálja $(-27/57 - 5/57) \cdot IR = -32/57 \cdot IR$

A **4. (sárga) síkra** csupán $4/19 \cdot I$ jut el, 6 élen át, élenként $2/57 \cdot IR$ potenciáleséssel. A sárga síkon a potenciál: $-34/57 \cdot IR$.



Az 5. (fekete) sík utolsó pontjához eljutó $1/19 \cdot I$ áramot 3 él hozza, a potenciálesés $1/57 \cdot IR$. Így a fekete pont potenciálja $-35/57 \cdot IR$.

.44) **Adott az alábbi végtelen négyzetrács, melynek minden szakaszát R ellenállás alkotja. Keressük az eredő ellenállást két szomszédos rácspont (A és B) között. ($R/2$)



Először vezessünk **be** I erősségű áramot az A rácspontba, ami a rács szimmetriájának megfelelően részekre osztva távozik a rácson végtelenbe. (Az A ponton átmenő, a rács síkjára merőleges tengelyű 90° -os elforgatásokkal egymásba átvihető szakaszokon ugyanakkora áram folyik.)

Majd vezessünk **ki** I erősségű áramot az B rácspontból, ami a rács szimmetriájának megfelelően érkezik meg B ponthoz a végtelenből.

Szuperponáljuk egymásra azt a két - időben állandó - elektromos teret, ami a fenti két áramelrendezést létrehozta. Az egyes áramerősségek is szakaszonként összeadódnak.

Most A ponton befolyik I áram, ami a B ponton folyik ki. Az AB szakaszon eközben $I/4 + I/4 = I/2$ áram folyik. (A többi szakaszt nem tudjuk, de ez most nem is fontos.) Az A és B közötti potenciálkülönbség $R \cdot I/2$.

$$\text{Az eredő ellenállás: } R_e = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{R \frac{I}{2}}{I}.$$

.45) **Szabályos testek (tetraéder, kocka, oktaéder, dodekaéder, ikozaéder) élhálózatát készítjük el, minden élnél R ellenállás felhasználásával. Mekkora lesz az egyes esetekben a rendszer eredő ellenállása két szomszédos csúcs között? ($R/2$, $7/12R$, $5/12R$, $19/30R$, $11/30R$)

Mind az öt szabályos test esete együtt is kezelhető: Jelölje c a csúcsok számát, f pedig az egy csúcsból induló élek számát. (c csúcsú gráf, minden pont foka f .)

Szuperpozíció: Először I áramot vezetünk **be** A pontnál, amit egyenlően szétosztva vezetünk ki a többi csúcsnál. (Mindez könnyen megtehető az előző feladat szerinti potenciálok biztosításával!)

Majd I áramot vezetünk **ki** a B pontnál, ami egyenlően folyik be a többi csúcsnál.

Az A-nál befolyó és B-nél kifolyó I áram a többi csúcsnál $I/(c-1)$ nagyságban folyik ki, illetve be, tehát azon a csúcsok csupán egyszerű csomópontjai a hálózatnak.

Az A-nél befolyó áram egyenlően oszlik szét az A-ból indul f él között is.

A szuperpozíció után az A-nál be-, a B-nél kifolyik $I_o = \left(1 + \frac{1}{c-1}\right) I$ áram, miközben az AB szakaszon összesen

$$2 \frac{I}{f} \text{ áram folyik. } R_e = \frac{U_{AB}}{I_o} = \frac{2 \frac{I}{f} R}{I \left(1 + \frac{1}{c-1}\right)} = \frac{2}{f} \frac{c-1}{c} R.$$

Tetraéder (4 db szabályos háromszöglap) : $c=4$, $f=3$;

kocka (6 szabályos négyzetlap): $c=8$, $f=3$;

oktaéder (8 db szabályos háromszöglap) : $c=6$, $f=4$;

dodekaéder (12 szabályos ötszöglap): $c=20$, $f=3$;

ikozaéder (20 szabályos háromszöglap): $c=12$, $f=5$.

(Vesd össze a korábbi ... feladat eredményével!)

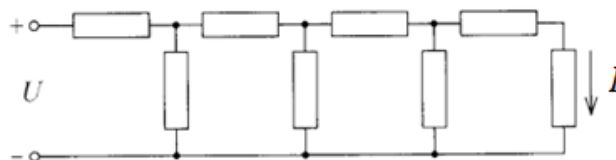
Sőt! A fenti gondolatmenet végképlete $c \rightarrow \infty$, $f=4$ esetére megadja a végtelen négyzetrács $R/2$ eredményét is!

.46) **Az ábrán látható ellenállások mindegyike R , a legutolsó ellenálláson I áram folyik.

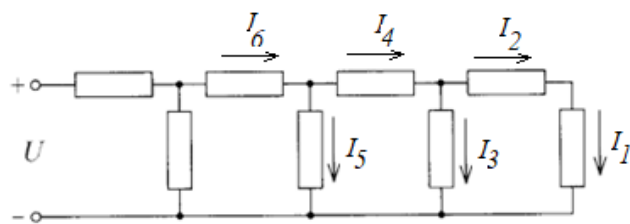
a) Mekkora a rendszerre kapcsolt U feszültség? ($34 \cdot RI$)

b) Mekkora az eredő ellenállás a telep kapcsai között? ($34/21R = 1,6190R$)

c) Hogyan változik az eredő ellenállás, ha a láncot nagyon hosszúvá készítjük? (felülről megközelíti $1,6180R$ -et)



.d) Egy nagyon hosszú láncot készítettünk, melyben a vízszintes szakaszokon R ellenállásokat alkalmazunk. Mekkora legyenek a függőleges szakaszok ellenállásai, hogy a hosszú lánc eredő ellenállása $1,3R$ legyen? **(0,39R)**



.a) Az ábra szerint megszámozzuk az egyes ellenállásokon átfolyó áramokat.

Huroktörvény pl. jobbról a második ablakban:

$RI_4 + RI_3 - RI_5 = 0$. Mivel az ellenállások egyenlők: $I_5 = I_4 + I_3$.

Csomóponti törvény egy felül lévő csomópontban:

$$I_6 = I_5 + I_4.$$

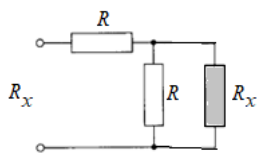
Tehát bármely (vízszintes vagy függőleges) áram a közvetlenül előtte lévő két áram összege: $I_n = I_{n-1} + I_{n-2}$, miközben $I_1 = I_2 = I$. (Ez a matematikából ismert Fibonacci-sorozat definíciója. $I, I, 2I, 3I, 5I, 8I, 13I, 21I, 34I, 55I, \dots$)

Huroktörvény a telep ablakában: $U = I_8 R + I_7 R = 34IR$

Megjegyzés: A vízszintes áramra (a csomóponti tv. miatt) mindig teljesül a Fibonacci-féle rekurzív összefüggés, de a függőleges áramokra (huroktv.) csak amiatt, hogy az összes ellenállás azonos!

.b) A telepből $I_8 = 21I$ áram folyik be a rendszerbe, az előtte lévő ellenállás árama $I_7 = 13I$.

Az eredő ellenállás: $R_e = \frac{U}{I_8} = \frac{34}{21} R = 1,6190 R$.



.c) A fenti gondolatmenetből kiolvasható, hogy az eredő ellenállást a lánc növelésével R egységekben úgy kaphatjuk, hogy a Fibonacci-sorozat páratlan indexű tagját osztjuk a közvetlenül előtte lévő páros indexű tagjával.

[Közismert lehet matematikából, hogy a Fibonacci-sorozat szomszédos tagjainak hányadosa az aranymetszés arányához tart, még hozzá elég „gyorsan”, azaz már az első

néhány tagra kiszámolva a hányados nagyon közel kerül ezen arányhoz (1,680). A közeledés során az egyes hányadosok váltakozva vannak a határérték felett ill. alatt.]

Fizikai ötlettel: A végtelen (nagyon hosszú) lánc olyan hosszú, hogyha még egy egységet balról hozzáépítünk, akkor az ellenállása nem változik meg.

R_x -hez párhuzamosan R van kapcsolva, majd a blokkjukkal sorosan ismét R , végül az eredő R_x lesz. Másodfokú

egyenlet adódik, amiből $R_x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} R = 1,680 R$.

.d) Az előző ötletet ismételjük, csak különböző R_1, R_2 ellenállásokkal. $R_x = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{R_2}{R_1}} \right) R_1$ adódik.

Helyettesítsük be az adatokat.