

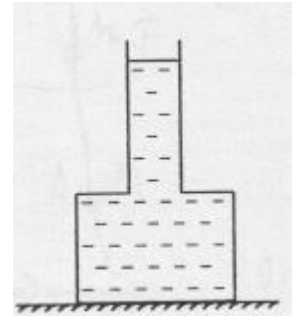
# 9-Nedvesség

## I. Hidrosztatika

A nehézségi gyorsulás értéke legyen  $g=10 \text{ m/s}^2$ , a normál légnyomás  $10^5 \text{ Pa}$ , a víz sűrűsége  $1 \text{ g/cm}^3$ , a higanyé  $13,6 \text{ g/cm}^3$ !

**.1)** Az ábrán látható edény alsó részének alapterülete  $1,5 \text{ dm}^2$ , térfogata  $3 \text{ dm}^3$ , a felső rész keresztmetszete  $0,5 \text{ dm}^2$ . Az edénybe  $4,5 \text{ dm}^3$  vizet öntünk.

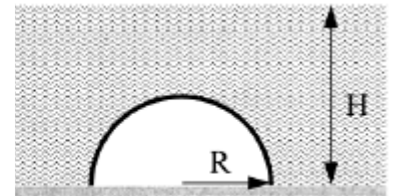
- Határozzuk meg a víz súlyából származó nyomást közvetlenül a fenéklap fölött, és a fenéklapra ható teljes nyomóerőt! (**5kPa; 1575 N**)
- Adjuk meg a betöltött folyadéktérfogatra ható, egymással egyensúlyt tartó függőleges erők nagyságát és irányát! (**1575 N felfelé; 45N; 1030N; 500N lefelé**)



- A szűk szárban a víz  $0,5 \text{ dm}$  magas. A hidrosztatikai (víz súlyából származó) nyomás  $h\rho g$ , a teljes nyomás ennél több, még hozzá a folyadékfelszín fölötti légnyomással.  $F=pA$ .
- Lefelé a nehézségi erőn kívül még a külső légnyomás és az edény „vállánál” lévő vízszintes fal is hat.

**.2)** Tenger alatti akváriumban a látogatók egy félgömbből szemlélhetik a tenger állat és növényvilágát. Mekkora erővel szorítja a víz a fenékhez a félgömböt?

$$\left[ \left( H - \frac{2}{3}R \right) R^2 \pi \rho g \right]$$



A félgömb külső felületén ható változó nagyságú és irányú erők összegzése felsőbb matematikát igényelne.

A keresett nyomóerő a félgömb felett lévő folyadékoszlop súlya.

Hogyan változna ennek súlya, ha ezt a folyadékoszlopot kiegészítenénk a félgömbbe töltött folyadéktérfogattal?

**.3)** Toricelli-kísérletben az üvegcsövet erőmérővel tartunk. Mit mutat az erőmérő? (Csak az üvegcső, vagy még a higanyoszlop súlyát is?) (**is**)

Vegyük számba a csőre ható erőket: rugóerő, nehézségi erő, és (!) a külső légnyomás nyomóereje lefelé.

A cső (közlekedőedény) szájánál a külső légnyomás tart egyensúlyt a higanyoszlop súlyából származó nyomással.

**.4)** Egy gyertya aljára nehezéket erősítünk, így azt a vízbe téve függőleges állásban úszik, miközben a vízből éppen  $l$  hosszúságú darabja áll ki. Meggyújtva a gyertyát, mennyi ideig fog világítani? A gyertya anyagának sűrűsége  $0,8 \text{ g/cm}^3$ , és az asztalon álló égő gyertya magassága egyenletesen égve  $\tau$  idő alatt rövidül meg  $l$  hosszúsággal. (**5 $\tau$** )

(Legyen a nehezék tömege  $m$ , a rá ható felhajtóerő a folyamat során  $F$ , a gyertya teljes hossza  $H$ , a kezdeti víz feletti hossza  $l$ , a gyertya hossza az elalváskor  $x$ !)

Az úszás miatt a mindenkor gyertya és a nehezék együttesére ható nehézségi erővel a felhajtóerők tartanak egyensúlyt. Kezdetben:  $H\rho_{gy}g + mg = (H - l)\rho_{víz}g + F$ , ..... és a végén is:  $x\rho_{gy}g + mg = x\rho_{víz}g + F$ .

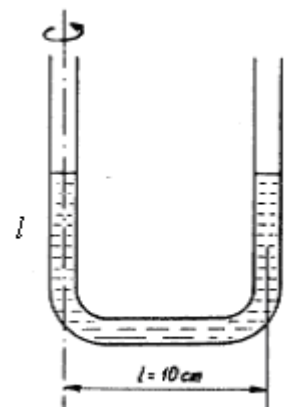
Ezek különbségét véve, a nehezék adatai kiesnek:  $H - x = l \frac{\rho_{víz}}{\rho_{víz} - \rho_{gy}} = 5l$ , ami pontosan az elégett gyertyahossz.

**.5)** U alakú üvegcső alján higany van. A higanyra az egyik szárába  $20 \text{ cm}$  hosszú vízoszlopot, a másik szárába  $20 \text{ cm}$  hosszú olajoszpót öntünk. Ekkor a két szárban a felső folyadékszintek különbsége  $0,265 \text{ cm}$  lesz. Mennyi az olaj sűrűsége, ha a higanyé  $13.600 \text{ kg/m}^3$ ? (**820  $\text{kg/m}^3$** )

A nagyobb sűrűségű víz ágában alacsonyabb a higanyszint. A nyomás megegyezik a két szárban olyan vízszintes sík mentén, mely mindkét szárban az alsó folyadékba merül.

Célszerű a víz-higany felülethez választani e síkot.

**.6)** Az ábra szerinti U alakú üvegcső mindkét szárba  $l = 10 \text{ cm}$  magasságig folyadékot töltünk. Az üvegcső alsó része szintén  $l$  hosszúságú és vízszintes. A csövet az egyik szára mint tengely körül forgásba hozzuk.



- a) Mekkora szögsebesség esetén „tűnik el” a folyadék a bal oldali csőből? (20/s)
- b) Mekkora szögsebesség esetén tölti ki a folyadék a cső alsó részének csak felét? (25,8/s)
- c) Mekkora szögsebességgel kell forgatni a csövet, hogy a vízszintes csőszakaszban egyáltalán ne legyen folyadék? (-)

Forgatáskor a vízszintes csőben lévő higanyrészre előírt nagyságú eredő erőnek (centripetális) kell hatnia, melyet a két függőleges szárban alján mérhető nyomásokból számított nyomóerők eredője ad meg.

- a) A centripetális erőigény  $m \frac{l}{2} \omega^2 = (l\rho) \frac{l}{2} \omega^2$ , míg a nyomások különbsége  $(2l)\rho g$ .
- b) A centripetális erőigény  $\left(\frac{l}{2}\rho\right) \frac{3}{4} l \omega^2$ , míg a nyomások különbsége  $\left(\frac{5}{2}l\right) \rho g$ .
- c) Mi történik az erővel, ha a vízszintes csőben a folyadékhossz a 0-hoz közeledik? A két szárban a folyadékszintek különbsége  $3l$ -hez, egy véges értékhez tart, így a súlyukból származó nyomóerők eredője véges értékhez közeledik. Eközben a centripetális erő  $m r \omega^2$  képletében  $r$  véges értékhez ( $l$ ), de az  $m$  tömeg 0-hoz tart! Így a szorzat csak úgy lehetne véges, ha  $\omega^2$  minden határon túl nőne (végtelenhez tart). Így bármilyen kicsi lehet a vízszintes higanyoszlop hossza (ennek megfelelő elég nagy  $\omega$  esetén), ámde a teljes higanyoszlop nem tűnhet el, mert  $\omega$  csak véges nagyságú lehet.

**.7)** Fémből készült közlekedőedény különböző vastagságú száraiban a vizet felülről jól záró, könnyen mozgó súlytalan dugattyúk zárják el, melyek területe  $15 \text{ dm}^2$ , és  $3,75 \text{ dm}^2$ . Kezdetben mindkét szárban  $50 \text{ cm}$  magasan állt a vízszint. A nagyobb területű dugattyúra  $60 \text{ kg}$  tömegű testet teszünk.

- a) Milyen távolságra lesznek a dugattyúk egymástól az egyensúly beállta után? (40 cm)
- b) Határozzuk meg a dugattyúk elmozdulását! (-8cm, 32 cm)

A teher hatására a terhelt csőben süllyed, a másikban emelkedik a vízszint, de a két térfogatváltozás azonos (hosszváltozás 4-szeres). A folyamat akkor áll meg, amikor a hidrosztatikai nyomások különbségéből adódó nyomóerő egyensúlyt tart a teher súlyával.

**.8)** Egy háromágú közlekedőedény azonos keresztmetszetű, függőleges száraiban higany található azonos magasságban. A bal oldali szárba  $h_1 = 340 \text{ mm}$  magasságú, a középső szárba  $h_2$  magasságú vízoszlopot öntöttünk. A higany 13,6-szer sűrűbb a víznél.

- a) Mennyivel mozdult el a higany szintje a jobb oldali szárban, ha a bal oldaliban  $x = 10 \text{ mm}$  a higanyszint elmozdulása? (15 mm vagy 35 mm)
- b) Milyen  $h_2$  magasságú vízoszlopot öntöttünk a középső szárba? (272 mm vagy 1088 mm)

A jobb oldali szárban mindenképpen emelkedik a higany szintje (a másik szárakba való vízöntés emeli azt). A másik két szárban a higanyszinteket nem láthatjuk előre, de valamelyikben biztos süllyedni fog a térfogatmegmaradás miatt.

A többfolyadékös közlekedőedények törvényének alkalmazásához tudnunk kell, hol a legalacsonyabb a higanyszint.

Süllyedjen a bal szárban  $x$ , a középsőben  $y$  millimétert a higanyszint az eredetihez képest. Ekkor a jobb szárban  $z = x + y$  az emelkedés, mert a higanytérfogat állandó.

a) Ha a bal szárban alacsonyabb a higanyszint ( $x > y$ ), akkor ebben a magasságban a hidrosztatikai nyomások egyenlősége miatt, egyszerűsítés után  $h_1 = h_2 + 13,6(x - y) = 13,6(x + z)$  egyenletek adódnak.

b) Ha a középső szárban alacsonyabb a higanyszint ( $x < y$ ), akkor ebben a magasságban véve a hidrosztatikai nyomások egyenlőségét,  $h_1 + 13,6(y - x) = h_2 = 13,6(y + z)$  egyenletek adódnak.

Mindkét egyenletrendszer megoldása ugyanaz (vajon miért?).  $y = h_1/13,6 - 2x$ , illetve  $h_2 = 2h_1 - 3 \cdot 13,6x$ .

Az a) esetben  $x > y$  miatt  $x > 8,3$  adódik, tehát  $x = +10 \text{ mm}$ , a bal szárban lefelé mozdul a higany, míg b) esetben  $x < y$  miatt  $x < 8,3$  adódik, tehát  $x = -10 \text{ mm}$ , a bal szárban felfelé mozdul a higany.

**.9)** Egy üveggolyó levegőben mért súlya  $0,09 \text{ N}$ . Petróleumba teljesen bemerítve a rugós erőmérő csak  $0,05 \text{ N}$  erőt jelez. A petróleum sűrűsége  $800 \text{ kg/m}^3$ , az üvegé  $2000 \text{ kg/m}^3$ . A levegőbeli felhajtóerőt elhanyagolhatjuk.

Tömör-e, avagy üreges a golyó? Ha üreges, mekkora a benne lévő üreg térfogata? (0,5 cm<sup>3</sup>)

A levegőbeli súlyból a tömeg számítható, amiből az üveg-anyag térfogata.

A két tartóerő különbsége a felhajtóerő, amiből a golyó külső térfogata számolható.

**.10)**

**.a)** Számítsuk ki a test sűrűségét, ha ismerjük azokat az erőket, melyekkel a test levegőben ( $T_1$ ) és vízben teljes bemerülés esetén ( $T_2$ ) megtartható.  $\left(\rho_{\text{víz}} \frac{T_1}{T_1 - T_2}\right)$

**.b)** Számítsuk ki a folyadék sűrűségét, ha ismerjük két azonos térfogatú, de különböző sűrűségű ( $\rho_1, \rho_2$ ) test súlyát ( $T_1, T_2$ ) teljes bemerülés esetén a folyadékba merítve! A levegőbeli felhajtóerőt elhanyagolhatjuk.  $\left(\frac{T_1 \rho_2 - T_2 \rho_1}{T_1 - T_2}\right)$

A testet tartó erő a nehézségi és a felhajtóerők különbsége.

**.a)**  $T_1 = mg$  és  $T_2 = mg - V\rho_0 g$ . Szükséges  $\rho = m/V$ .

**.b)**  $T_1 = V\rho_1 g - V\rho_0 g$  és  $T_2 = V\rho_2 g - V\rho_0 g$  egyenletrendszer megoldandó  $V$ -re és  $\rho_0$ -ra.

**.11)** Egy edényben alul higany, felette víz található. Egy  $500 \text{ cm}^3$  térfogatú test úgy úszik a folyadékban, hogy térfogatának fele a higanyba, másik fele teljesen a vízbe merül. A higany 13,6-szer sűrűbb a víznél.

**a)** Mekkora a test sűrűsége? **(7,3 g/cm<sup>3</sup>)**

**b)** Csupán a higanyon úszva a testnek hányad része merülne be a higanyba? **(53,7%)**

**c)** Mekkora erővel kellene tartani a testet, ha egy fonálon csupán vízbe lógatnánk? **(31,5 N)**

**.a)** Az összes felhajtóerő a külön-külön számolt kiszorított folyadékok súlyainak összege. Ez tart egyensúlyt a nehézségi erővel.

**.b)** A bemerülés térfogataránya a sűrűségek arányával egyenlő.

**.c)** A tartóerő a nehézségi és a felhajtóerő különbsége.

**.12)** Szirakuza királyának koronáját a mester színarany helyett arany és ezüst ötvözetéből készítette. Archimédész a korona súlyát levegőben 20, vízben pedig 18,75 fontnak találta. Határozzuk meg a felhasznált arany és ezüst térfogat- és tömegarányát! Az arany sűrűsége 19,3-szerese, az ezüsté 10,5-szerese a vízének, a levegőbeli felhajtóerőt hanyagoljuk el. **(5/3; 3,06)**

Írjuk fel a tartóerőt a vízben és a levegőben is az arany (1)–ezüst (2) ötvözetre, majd vegyük a két erő hányadosát.

$\frac{18,75}{20} = 1 - \frac{V_1 + V_2}{m_1 + m_2} \rho_{\text{víz}}$  adódik.  $m_i = \rho_i V_i$  segítségével a térfogatok aránya megkapható.

**.13)** Hogyan változik a tóban a vízszint, ha a horgász a csónakból követ dob a tóba ill, fapipáját a tóba ejti?  
**(csökken ill. nem változik)**

Úszáskor a rendszer (ember-csónak-tárgy) teljes súlyának megfelelő súlyú vizet kell kiszorítani. Az ember és csónak számára kezdetben is és a végén is a csónak szorítja ki a megfelelő súlyú vizet. De a tárgy számára csak addig, amíg a csónakban van.

Ha a tárgyat a tóba dobjuk és ott úszik, akkor a tárgy magának ki tudja szorítani a saját súlyának megfelelő súlyú vizet, ekkor a kiszorított vízmennyiség és a vízszint ugyanaz marad.

Ha azonban a bedobott tárgy elmerül, akkor ő magának nem tudja kiszorítani a saját súlyának megfelelő súlyú vízmennyiséget, ezért kevesebb az összes kiszorított víz mint eredetileg, a vízszint csökken.

**.14)** Az egész rendszer  $0^\circ \text{C}$  hőmérsékletű. A vas ill. jég sűrűsége  $7.800 \text{ kg/m}^3$  ill.  $900 \text{ kg/m}^3$ . Hogyan és mennyivel változik meg az edényben a víz magassága, ha a jég elolvad, de a hőmérséklet  $0^\circ \text{C}$  marad? **(13,6 mm, csökken)**

Úszó test esetén az összes nehézségi erővel a kiszorított folyadéktérfogat súlya tart egyensúlyt. A kezdeti rendszernek a jég tömege és a vas tömege miatt kell vizet kiszorítani.

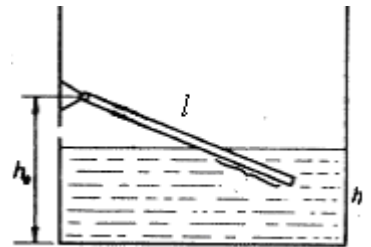
A jég tömege az olvadás során nem változik, és az olvadákvíz (teljes bemerülés mellett) úszik a víz felszínén, így olvadás után is ugyanannyi vizet szorít ki (180 g-nak megfelelő  $180 \text{ cm}^3$ -t).

A 15,6 g vas számára kezdetben a rendszer szorít ki 15,6 g, azaz  $15,6 \text{ cm}^3$  vizet. Olvadás után a vas magának csak a  $2 \text{ cm}^3$ -t szorít ki (mert elmerül), így a kiszorított folyadéktérfogat csökken  $13,6 \text{ cm}^3$ -rel.

Ez a térfogatcsökkenés a  $100 \text{ cm}^3$  alapterület miatt 13,6 mm vízszint csökkenést jelent (függetlenül a kezdeti rendszer alakjától!).

**.15)** Az edény függőleges falán az aljától  $h_0$  magasságban egy csukló segítségével egy  $l$  hosszúságú rúd van rögzítve. A csukló körül a rúd szabadon elfordulhat.

- a) Mekkora a rúd anyagának sűrűsége, ha  $h_0 > h$  és rúdnak éppen a fele merül be a vízbe az ábra szerint? ( **$750 \text{ kg/m}^3$** )
- b) Mekkora része van a rúdnek a vízben, ha az edénybe annyi folyadékot töltünk, hogy  $h_0 < h$  legyen? ( **$86,6\%$** )
- c) \*Ábrázoljuk  $h$  vízmagasság függvényében a  $[h_0 - l; h_0 + l]$  intervallumon, hogy a rúdnek hányad része merül a vízbe, feltételezve az .a) pontbeli rúdsűrűséget.



.a) A csuklónál felvett, az ábrára merőleges tengelyre a forgatónyomatékok összege 0.

Ha  $d$  jelöli a rúd vízszintes vetületét, akkor a nehézségi erő nyomatéka  $[V\rho_{\text{rúd}}g] \cdot \frac{d}{2} = \left[\left(\frac{1}{2}V\right)\rho_{\text{víz}}g\right] \cdot \frac{3}{4}d$ .

.b) Legyen a rúdnek a bal oldali, vízben lévő hossza a teljes hossz  $\lambda$ -szorosa. A forgatónyomatékok miatt a fenti egyenlet jobb oldala változik:  $[V\rho_{\text{rúd}}g] \cdot \frac{d}{2} = [\lambda V\rho_{\text{víz}}g] \cdot \frac{\lambda}{2}d$ . Ebből  $\lambda = \sqrt{\frac{\rho_{\text{rúd}}}{\rho_{\text{víz}}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , csakis az anyagi minőségek függvénye, azaz a rúdnek *mindig ugyanazon pontja van a víz felszínén*, a rúdnek az ábra szerinti *ferde* egyensúlyi helyzetében!

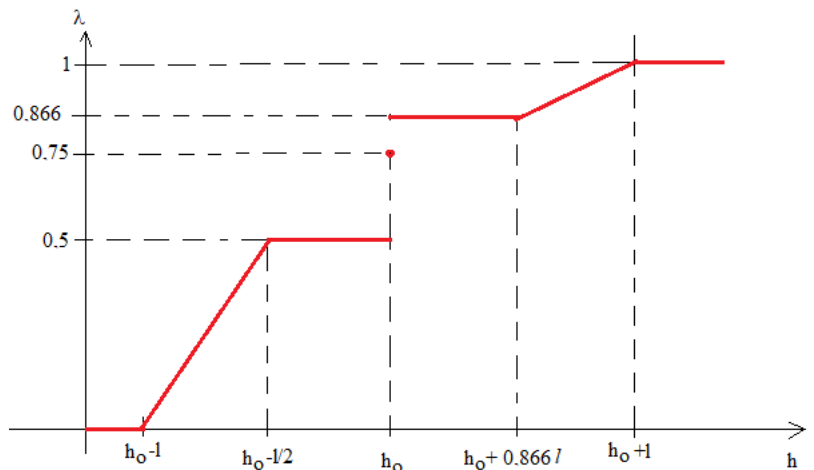
.c) Az .a) pontbeli  $h_0 > h$  esetben,  $\lambda$ -val jelölve a bemerülő (jobb oldali) térfogatarányt:

$[V\rho_{\text{rúd}}g] \cdot \frac{d}{2} = [\lambda V\rho_{\text{víz}}g] \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)d$ . Ebből  $\lambda = 1 - \sqrt{1 - \frac{\rho_{\text{rúd}}}{\rho_{\text{víz}}}} = \frac{1}{2}$ , csakis az anyagi minőségek függvénye, azaz a rúdnek *mindig ugyanazon pontja van a víz felszínén*, az ábra szerinti **ferde** egyensúlyi helyzetben!

Ha tehát a  $h$  vízmagasságot folyamatosan növeljük, akkor a rúd mindaddig nem tudja felvenni az ábra szerinti ferde helyzetet, amíg a vízmagasság a függőlegesen lógó rúd felezőpontjáig nem ér. Innentől rúd felezőpontja mindig a vízfelszínen lesz, egészen a vízszintes helyzet eléréséig, fele térfogatát a vízbe merítve. A vízszintes helyzetben a csuklónak nincs szerepe, a rúd  $\frac{3}{4}$ -ede van a víz alatt.

Ha a vízmagasság meghaladja a csukló magasságát, a rúd a vízbe mindig a  $86,6\%$ -át meríti. Amikor a rúd eléri függőleges helyzetét, akkor a további vízszintemelkedés ellenére stabilis függőleges helyzetben marad.

A ferde egyensúlyi helyzet mindig stabilis.



Ha a rudat nem éri kicsi környezeti zavar  $h = h_0 - l/2$  esetén, vagy ezt követően, akkor megmaradhat labilis függőleges egyensúlyi helyzetében is.

**.16)**  $0,5 \text{ N}$  súlyú,  $l=1 \text{ m}$  hosszú és  $A=1 \text{ cm}^2$  belső keresztmetszetű, egyik végén zárt üvegcsövet nyitott végével lefelé vízbe nyomunk. A külső légnyomás  $p_0=10^5 \text{ Pa}$ . Az üveg sűrűsége  $2.000 \text{ kg/m}^3$ , a bezárt levegő és vízgőz tömege elhanyagolható. A csövet lenyomva, abba alulról részben behatol a víz, miközben a bezárt levegőoszlop  $x$  hosszúsága és a bezárt levegő  $p$  nyomása fordítottan arányos:  $px = p_0 l$ .

Adjuk meg azt a mélységet, melynél a cső éppen lebeg a vízben. Milyen a cső egyensúlyi helyzete?

**(29,75 m a cső teteje; labilis)**

A csövet lefelé nyomva, a beszorult levegő térfogata csökken, a cső-levegő rendszer térfogata csökken, sűrűsége nő. Amikor eléri a víz sűrűségét, lebeghet.

.b) Az egyensúlyban lévő lebegő csövet *nyomjuk lefelé*, miközben a csőben rögzítsük a levegőoszlop hosszát! Ekkor a levegőoszlop alján a nyomás megnő. Oldjuk fel a levegőoszlop hosszának rögzítését! Ekkor az oszlop összemegy a nagyobb nyomás miatt. Így a cső-levegő rendszer térfogata kisebb, sűrűsége pedig nagyobb lesz, így *elengedve a csövet, lefelé mozdul*.

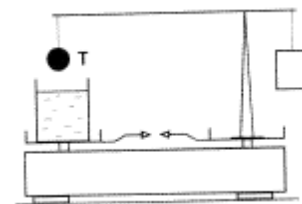
*Feljebb húzva a lebegő csövet, az felfelé indul.*

.a) Legyen a légoszlop alsó szintje  $h$  mélységben a vízszint alatt, miközben a levegőoszlop  $x$  hosszúságú!

Ott a nyomás  $p = p_0 + h\rho g$ , ezért a megadott összefüggés miatt  $(p_0 + h\rho g)x = p_0 l$  megadja  $x$  és  $h$  kapcsolatát.

Lebegéskor az erők egyensúlyt tartanak:  $0,5N = (V_{cső} + Ax)\rho_{víz}g$ . Ebből  $x$  számolható:  $0,25\text{ m}$ . Amiből az előzőek szerint  $h$  számolható:  $30\text{ m}$ .

**.17)** Egy mérleg egyik tányérjába helyezett vizet tartalmazó poharat kiegyensúlyozza a másik tányérba helyezett – egyensúlyban lévő – emelő. Mi történik, ha a  $T$  fémgömböt a tartófonál meghosszabbításával a víz alá engedjük? Megbomlik-e a mérleg ill. az emelő egyensúlya? (A gömb nem ér hozzá a pohár falához és aljához, a fonal súlya elhanyagolható. **(balra, jobbra)**)



Vízbe eresztve a testet, arra felhajtóerő ébred ami a jobb serpenyőt emeli, a felhajtóerő ellenereje a vízre hatva, a bal serpenyőt lenyomja.

**.18)** Két, egyenként  $5\text{ cm}$  élű,  $7.800\text{ kg/m}^3$  sűrűségű vaskockát egy olyan mérleg karjainak végére függesztünk, melyek hosszának aránya  $2:3$ . Milyen sűrűségű folyadékba kell teljesen bemeríteni a hosszabbik karon függő kockát, ha szeretnénk a mérleg egyensúlyát helyreállítani? **(2600 kg/m<sup>3</sup>)**

Kezdetben a bal oldali forgatónyomaték  $3/2$ -szer nagyobb, az egyensúlyhoz ezt kell  $2/3$ -ára csökkenteni. Tehát a bal oldalon a nehézségi erő  $1/3$ -ának megfelelő felhajtóerő szükséges. Ehhez a test sűrűségének harmada legyen a folyadék sűrűsége.

**.19)** Az  $a=1\text{ m}$  élű kocka alakú edény egyik (függőleges) oldallapja levehető. A kockát teljesen meg szeretnénk tölteni vízzel, miközben az oldallapot kívülről, egy pontban, a lehető legkisebb erővel szeretnénk megtámasztani úgy, hogy a víz ne folyjon ki. Mekkora erővel (\*és hol) kell megtámasztani? **(5000 N; alsó 1/3-ánál)**

A probléma az, hogy a hidrosztatikai nyomás változik a vízmélységgel. Megoldás: A lapot nagyon vékony vízszintes szeletekre osztjuk, és a szeletekre ható erőket összegezzük, miközben egy szeleten belül állandónak tekintjük a nyomást.

a) A vízfelszín alatti  $x$  mélységben felvett  $\Delta x$  vastag szeletnél a nyomás  $x\rho g$ , így a nyomóerő  $\Delta F = (x\rho g)(a\Delta x)$ . Ezeket kell összegezni miközben  $x$  értéke  $[0; a]$  intervallumban változik:  $F = \sum_{x=0}^a x\rho g a\Delta x = \rho g a \sum_{x=0}^a x\Delta x$ . Az utolsó szumma-jel szemléletes jelentése az  $f(x)=x$  függvény görbéje „alatti” síkidomba írt téglalapsereg területösszege  $x=0$ -tól  $x=a$ -ig.

Ez elegendően finom felosztás (elegendően kicsi  $\Delta x$ -ek) esetén elegendően közel van az egyenes és az  $x$ -tengely határolta háromszög területéhez, ami  $a^2/2$ . Így a nyomóerő  $F = \frac{1}{2}\rho a^3 g = \frac{1}{2}mg$ , [a legkisebb ( $0$ ) és legnagyobb ( $a\rho g$ ) nyomással számolt nyomóerők átlaga].

b) Az egyensúlyban lévő lapot - nyilván a függőleges középvonala mentén- megtámasztó, fenti nagyságú, pontba koncentrált erő forgatónyomatékával a lapra iménti vékony szeleteire ható nyomóerők együttes forgatónyomatéka tart egyensúlyt.

Legyen a tengely a megtámasztandó lap felső vízszintes éle. Az  $x$  erőkarhoz tartozó  $\Delta F = x\rho g a\Delta x$  erő forgatónyomatéka  $\Delta M = x^2\rho g a\Delta x$ , ezek összege:  $M = \sum_{x=0}^a x^2\rho g a\Delta x = \rho g a \sum_{x=0}^a x^2\Delta x$ . Az utolsó szumma-jel szemléletes jelentése az  $f(x)=x^2$  függvény görbéje „alatti” síkidomba írt téglalapsereg területösszege  $x=0$ -tól  $x=a$ -ig. Ez elegendően finom felosztás (elegendően kicsi  $\Delta x$ -ek) esetén elegendően közel van a parabola és az  $x$ -tengely határolta „parabolikus háromszög” területéhez. Ez Archimedesz közismert eredménye szerint éppen harmada a parabolikus háromszöget magába foglaló, origó középpontú téglalapnak, melynek oldalai  $a$  és  $a^2$ , területe így  $a^3/3$ . Tehát  $M = \rho g a \frac{a^3}{3}$ .

Ezzel tart egyensúlyt a fent kiszámolt támasztóerő forgatónyomatéka, ezért annak karja  $d = \frac{M}{F} = \frac{2}{3}a$ . Azaz a lapon nem középen(!) hanem *függőleges középvonalának alsó harmadolópontjában* kell megtámasztani.

**.20)** Egy  $\rho$  sűrűségű folyadékot tartalmazó edény  $a$  nagyságú ( $a < g$ ) gyorsulással mozog...

- I.)...függőlegesen felfelé,
- II.)... függőlegesen lefelé.
- III.)...vízszintesen.

- a) Mekkora a hidrosztatikai nyomás a folyadékszint alatt  $h$  távolságra? ( $p = h\rho|\vec{a} - \vec{g}|$ )
- b) Hogyan változik a vízben lévő golyóra ható felhajtóerő a gyorsulásmentes állapothoz képest? (-)
- c) Változik-e a felszínen úszó test bemerülése? **(nem)**

- d) Egy fagolyót ( $0,7 \text{ g/cm}^3$ ) és egy üveggolyót ( $2,5 \text{ g/cm}^3$ ) magára hagyunk egy olyan vízzel teljesen kitöltött, zárt edényben, amit  $a=8 \text{ m/s}^2$  gyorsulással mozgatunk az asztalhoz képest,  $\vec{g}$  irányával  $120^\circ$ -os szöget bezáró irányba. Milyen gyorsulásvektorral mozognak a golyók az edényhez és az asztalhoz képest?  
**(az edényhez képest  $6,62 \text{ m/s}^2$  felfelé és  $9,37 \text{ m/s}^2$  lefelé az edénybeli „függőleges” irányába, az asztalon megrajzolt függőlegeshez képest  $26,3^\circ$ -os szöggel)**  
**(az asztalhoz képest  $14,1 \text{ m/s}^2$  felfelé, az asztal lapjával  $45,3^\circ$ -os szögben, és az asztalhoz képest  $5,20 \text{ m/s}^2$  lefelé, az asztal lapjával  $57,8^\circ$ -os szögben)**

.a) Bármely  $m$  tömegű folyadékra eredő gyorsítóerőnek kell hatnia, melyet a nehézségi erő és a folyadék többi része által kifejtett  $T$  tartóerő biztosít:  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$ , amiből  $\vec{T} = m(\vec{a} - \vec{g})$ . Így a kiszemelt  $m$  tömegű folyadék részlet által az őt „tartó” *folyadékkörnyezetre kifejtett „súly”*  $-\vec{T} = m(\vec{g} - \vec{a})$ .

Eközben a folyadékban a „**függőleges irány**” éppen  $T$  iránya. (ezen belül a „felfelé irány”  $T$  iránya, míg a „lefelé irány”  $-T$  iránya) A folyadék **szabad felszíne a „függőleges” irányra merőleges**.

Ha egy „függőleges”  $h$  magasságú,  $A$  alapterületű folyadékoszlopot szemelünk ki, akkor a felszín „alatt”  $h$  mélységben a **hidrosztatikai nyomás**:  $p = \frac{T}{A} = \frac{V\rho}{A} |\vec{g} - \vec{a}| = h\rho |\vec{g} - \vec{a}|$ .

Az I) esetben  $p = h\rho(g + a)$ , a II) esetben  $p = h\rho(g - a)$ , mindkét esetben a függőleges irány  $\vec{g}$  irányú.

A III) esetben  $p = h\rho\sqrt{a^2 + g^2}$ , a „függőleges lefelé irány” pedig  $\vec{g}' = (\vec{g} - \vec{a})$  iránya.

[Minden fenti eredményhez rövidebben is eljuthatunk, ha a *folyadékkal együtt gyorsuló neminercia-rendszerből* szemléljük az eseményeket: Ekkor a valóban ható  $\vec{T}$  és  $m\vec{g}$  mellé fel kell venni a *fiktív  $-m\vec{a}$  tehetetlenségi erőt*, és e 3 erő eredőjének hatására ebben a rendszerben a *kiszemelt folyadék részlet egyensúlyban van*:  $\vec{T} - m\vec{a} + m\vec{g} = \vec{0}$

**A gyorsított rendszerben a folyadék részlet nyugalomban van**, és úgy tekinthető mintha az **eredeti  $\vec{g}$  gravitációs gyorsulás helyére  $\vec{g}' = (\vec{g} - \vec{a})$  lép**:  $\vec{T} + m\vec{g}' = \vec{0}$  ]

.b) A vizbeli golyóra ható erőt a folyadék részecskék fejtik ki, és ez (felületi erők eredője lévén) ugyanakkora, mintha a golyó helyét víz töltené ki, tehát  $\vec{F}_f = \vec{T} = m_{\text{viz}}(\vec{a} - \vec{g}) = V\rho_{\text{viz}}(\vec{a} - \vec{g})$ .

Az .I) esetben nagysága  $V\rho_{\text{viz}}(g + a)$ , és függőlegesen „felfelé”,  $\vec{g}$ -vel ellentétesen mutat,...

a .II) esetben nagysága  $V\rho_{\text{viz}}|g - a|$ , és függőlegesen „felfelé”,  $\vec{g}$ -vel ellentétesen mutat  $a < g$  esetén; 0-vá válik  $a = g$  esetén (szabadon eső folyadékban nincs felhajtóerő!); továbbá „felfelé”, azaz  $\vec{g}$ -irányába mutat  $a > g$  esetén.

A .III) esetben nagysága  $V\rho_{\text{viz}}\sqrt{a^2 + g^2}$ , a „függőleges felfelé” mutat, mégpedig  $-\vec{g}' = (\vec{a} - \vec{g})$  irányába.

.c) **Az úszás feltétele**, hogy a golyó (az edényhez rögzített koordinát-rendszerben) a szabad felszín felé („felfelé”), azaz  $-\vec{g}' = (a - \vec{g})$  irányába mozduljon el, ha a folyadék belsejében magára hagyjuk. Azaz a felhajtóerő nagysága teljes bemerülés esetén nagyobb legyen mint az ellentétes irányú  $m\vec{g}'$  nagysága:  $V\rho_{\text{viz}}|\vec{a} - \vec{g}| > m|\vec{a} - \vec{g}|$ , tehát  $V\rho_{\text{viz}} > V\rho$ , azaz  $\rho_{\text{viz}} > \rho$ , akárcsak a nem gyorsuló esetben.

A felszínen úszó test *csak annyira merül be*, hogy a rá ébredő felhajtóerő egyensúlyt tartson az ellentétes irányú  $mg'$  erővel:  $V^{be}\rho_{\text{viz}}|\vec{a} - \vec{g}| = V\rho|\vec{a} - \vec{g}|$ , azaz  $\frac{V^{be}}{V} = \frac{\rho}{\rho_{\text{viz}}}$ , **akárcsak a nem gyorsuló esetben**.

**Összefoglalva**: A gyorsított folyadékban is van hidrosztatikai nyomás és felhajtóerő, a képletek ugyanazok mint a nyugalomban lévő folyadék esetén, csupán a bennük szereplő  $\vec{g}$  helyett mindenütt  $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$  írandó.

Az úszás és a közben történő bemerülés feltételei szintén ugyanazok mint a nem gyorsított esetben.

.d) **Az edényhez rögzített rendszerben**  $g$  megváltozik, nagysága  $g' = 15,62 \text{ m/s}^2$  lesz, iránya az asztal lapjával  $63,4^\circ$ -os szöget zár be. Az itt elképzelt nehézségi erő  $V\rho_{\text{test}}g'$ , a felhajtóerő pedig  $V\rho_{\text{viz}}g'$ . Eredőjük gyorsítja a testeket az edényhez képest.

**Az asztalhoz képesti gyorsulás**:  $\vec{a}_{\text{test(asztal)}} = \vec{a}_{\text{test(edény)}} + \vec{a}_{\text{edény(test)}}$ .

.21) Egy pohár alján homogén anyagból készült  $600 \text{ g}$  tömegű tömör golyó található. Az edénybe a golyó sűrűségénél háromszor nagyobb sűrűségű folyadékból annyit töltünk, hogy a golyótérfogatának hatod része merül be a folyadékba. Mekkora erővel nyomja a golyó az edény alját? (3N)

$F_{\text{felhajtó}} = V^{\text{bemerülő}} \cdot \rho_{\text{folyadék}} \cdot g$  és  $mg = V \cdot \rho_{\text{test}} \cdot g$ . A sűrűségek és a térfogatok aránya ismert, így a felhajtó- és a nehézségi erő aránya számolható.

**.22)** Egyensúlyban lévő egyenlő karú mérleg egyik serpenyőjében egy fakocka, a másikban egy rézkocka van. Hogyan változik meg a mérleg egyensúlya, ha a mérleget egy légszivattyú burája alá tesszük és a levegőt kiszivattyúzzuk a búra alól? **(fa le)**

A testekre eredetileg a levegőben is hat (kicsi) felhajtóerő.

A serpenyők által kifejtett tartóerő  $K = mg - F_f = V\rho g - V\rho_{lev}g = Vg(\rho - \rho_{lev})$ . Mivel a forgatónyomatékok és a mérlegkarok egyenlők, így a  $K$  tartóerők is. De a  $fa$  kisebb sűrűségű, így a *térfogata nagyobb*.

A légnyomás megszűnése eltünteti a felhajtóerőket. Ennek a mérlegre olyan hatása van, mintha a kezdő helyzetben (légnyomás mellett) mindkét oldalon lefelé(!) egy akkora erőt fejtenénk ki, mint az eredeti felhajtóerő. Ez pedig az egyenlő karokon a  $fa$  oldalára billenti a mérleget.

**.23)** Két ötlet örökmozgóra:

„Az ékszír egy része vízbe merül, az erre ható felhajtóerő megforgatja az ékszírat.”

„A korong fele a vízbe merül, a bemerülő rész tömegközéppontjába képzelt felhajtóerőnek forgatónyomatéka lesz a tengelyre nézve, a korong forgásba jön.”

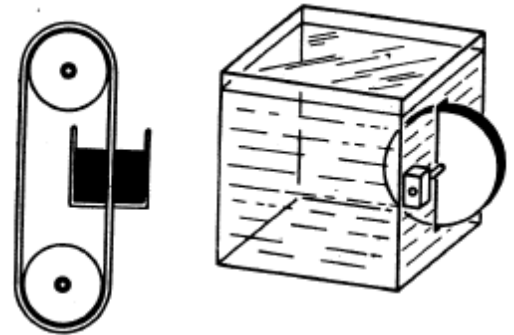
Miért nem működnek örökmozgóként az alábbi szerkezetek?

Sem a félkorongot, sem az ékszírdarabot nem veszi körül teljesen (minden oldalról) a víz. Ezért téves, ha a tömegközéppontjukban ható felhajtóerőt képzelünk el.

A *szír* bal és jobb oldalainál ható erők hatása egymást lerontja eredőjük és forgatónyomatékaik eredője is 0), alul és felül pedig nincs folyadék-erő.

A *korong* szemközti félkörlelapjain egymást lerontják a nyomóerők, míg a palást felületegységeire ható erők a palástra merőlegesek, azaz tengelyirányúak, a tengelyre forgatónyomatékuk nincs.

[Ha a korongot jobbról is víz venné körül, akkor a TKP-be képzelt felhajtóerő lenne az eredő, forgatónyomatéka a tengelyre negatív lenne.. Mivel azonban e jobbról érkező nyomóerő nincs, ennek forgatónyomatékát le kell vonni a TKP-beli felhajtóerő forgatónyomatékából. A hiányzó erő eredője a nyomott függőleges felület alsó egyharmadnál hat, így pozitív forgatónyomatékával képes teljesen lerontani a tömegközéppontban elképzelt felhajtóerő negatív forgatónyomatékát.]



## II. Felületi feszültség:

(A víz-levegő határfelületi feszültség:  $0,0729 \text{ N/m}$ )

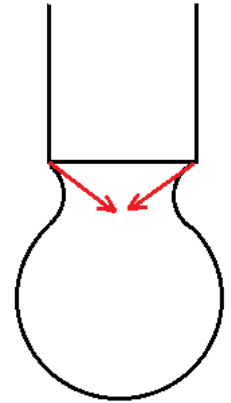
**.24)** A kapilláris cső külső átmérője  $4 \text{ mm}$ .

- Legfeljebb mekkora súlyú vízcsepp alakulhat ki az alján? **(0,916 N)**
- Biztosan ekkora csepp alakul-e ki a cső alján a lecseppenéskor? **(kisebb)**

.a) A víz és a cső egymásra a kerülete mentén  $2\pi \cdot r \cdot \alpha$  erőt fejt ki, mely megtartja a vízcseppet. A vízcsepp akkor lehet a legnagyobb, ha ez az erő függőleges.

.b) A kísérletek tanulsága szerint a vízcsepp közvetlenül a lecseppenés előtt „befűződik” az ábra szerint, így nem lesz a vízfelületben fekvő erő függőleges, a fent kiszámolt erőnek csak egy része tudja a vizet tartani. A kísérletek szerint

$2\pi \cdot r \cdot \alpha = mg$  helyett a valóságban  $k \cdot r \cdot \alpha = mg$  áll fenn, ahol  $k=3,8-4,5$  ( $2\pi = 6,28$  helyett).



**.25)** Egy vékony csőből előbb  $100$  csepp vizet, majd  $100$  csepp terpentinolajat csepegtetünk. A kicsepegtetett víz  $9 \text{ cm}^3$ , míg az olaj  $4 \text{ cm}^3$ . Mekkora az olaj felületi feszültsége, ha sűrűsége  $0,96 \text{ g/cm}^3$ . **(0,0311 N/m)**

Az egyes cseppek súlyával egyenlők a felületi feszültségből származó erők. Feltéve, hogy  $k$  értéke azonos a két anyagnál:  $kr \propto mg = \frac{V\rho}{n}g$  miatt  $\propto V\rho$ .

**.26)**

- Az  $1,2 \text{ mm}$  belső átmérőjű kapilláris csőben milyen magasra emelkedik a víz, ha az hosszan kiáll az edényben lévő vízszint fölé? **(2,43 cm)**
- Mi történik, ha a vízbe nyomjuk addig, hogy csak  $1 \text{ cm}$ -re álljon ki a csőből? Kicseppenik-e fent a csőből a víz? **(nem; R=1,458 mm)**

.a) *Ötlet1:* Az üveget tökéletesen nedvesítő víz és a cső határgörbéjére a cső kerület mentén kifejt  $2\pi \cdot r \cdot \alpha$  erőt, mely megtartja a  $h$  magasságú,  $r$  sugarú hengerben lévő víztömeget.

*Ötlet2:* A vízfelszín homorú a csőben legfelül, emiatt a levegőből a felszínen át a vízbe lépve, a  $p_0$  nyomás lecsökken a  $p_g = \frac{2\alpha}{r}$  görbületi nyomással, majd  $h$  mélységbe lejjebb merülve, a hidrosztatikai nyomás nő  $h\rho g$ -vel, miközben végül a kapilláris aljánál lévő nyomás a külső  $p_0$  nyomással tart egyensúlyt:  $p_0 - p_g + h\rho g = p_0$ .

.b) A felfelé meginduló, kezdetben lefelé domborodó félgömb alakú vízfelszín a cső tetejéhez ér, a határfelület alakja megváltozik (mintha ki akarna folyni a csőből), egyre kevésbé lesz domború, a görbületi sugara nő, így a két oldal közötti (görbületi)nyomáskülönbség csökken. Így a folyadékoszlopnak már nem kell olyan magasnak lennie (ahhoz, hogy hidrosztatikai nyomása a görbületi nyomással egyenlő lehessen). Felfelé dudorodni nem fog, csupán kevésbé lesz homorú.

**.27)** Mi történik, ha a kapilláris csőben, a felemelkedő nedvesítő folyadékoszlop oldalán, kis nyílást készítünk? (Folyamatosan ömlik-e a folyadék kifelé? Örökmozgó? **(nem)**)

A csőben legalul  $p_0$  normál nyomás van. A csőben felefelé emelkedve mindenütt *kisebb* a nyomás!

Így szóba sem jön, hogy a víznek kifelé, inkább a levegőnek befelé kellene áramolnia!

De nem fog, ugyanis ahhoz előbb a víz-levegő határfelületnek befelé kell domborodnia, ám ekkor a lyuk kerülete mentén kifelé húzó erők leállítják a levegő beáramlását. (Avagy: a határfelület pontosan annyit domborodik be, hogy az alakjának megfelelő felület két oldala között a görbületi nyomás éppen a külső légnyomás folyadékbeli hidrosztatikai nyomás és különbsége legyen).

**.28)** Éter ( $\alpha=0,0164 \text{ N/m}$ ;  $\rho=714 \text{ kg/m}^3$ ) az üvegfalhoz  $\vartheta = 16^\circ$ -kal illeszkedik. Milyen magasra emelkedik az  $d=1 \text{ mm}$  átmérőjű kapillárisban? Méréssel ellenőrizzük a gyakorlatban  $\vartheta$ ,  $d$  és  $h$  kapcsolatát! (Mérjük  $h$  és  $d$  értékét, majd számoljuk ki a hozzájuk tartozó szöveget.)  $\left(\frac{2\cos\vartheta}{d\rho g}\right)$

A határfelület peremét nem függőlegesen húzza az erő, de csak a függőleges komponens tart egyensúlyt a nehézségi erővel.

**.29)** Téglalap alakú drótkeret egyik oldala mozgatható, a szomszédos oldalegyeneseken elcsúsztható. Hossza 4 cm, tömege 0,2 g. A téglalapra 0,02 N/m határfelületi feszültségű szappanoldatból egy vékony hártyát készítünk.

- a) Milyen állásban kell tartani a téglalap alakú hártyát, hogy a mozgatható oldal külső erőhatás nélkül egyensúlyban maradjon? **(36,9° a függőlegeshez képest)**
- b) Milyen az egyensúlyi helyzet jellege a fixen tartott téglalap mozgó oldalának helyzetét tekintve, illetve milyen a téglalap függőlegessel bezárt szögére nézve? **(közömbös; labilis)**

**.a)** A hártya kétoldalú, így a hártyát a mozgatható oldalnál  $2l \propto$  erő húzza. Ez kevesebb az oldalra ható nehézségi erőnél. Megdöntve a hártyát, az egyik erő nem változik, a másiknak pedig csak az egyik komponense növelné a hártya méretét.

**.b)** Fix állású hártya esetén mozdítsuk el az oldalt kissé és vizsgáljuk a rá ható erők egyensúlyát ezen helyzetben. Majd változtassuk kissé a téglalap dőlésszögét és vizsgáljuk az erőket.

**.30)** A  $h=1$  mm vastagságú,  $d=22$  mm átmérőjű alumíniumból ( $\rho=2700$  kg/m<sup>3</sup>) készült régi egyforintost a víz felszínére helyezünk. Tételezzük fel, hogy az lehajló vízfelszín tökéletesen érintőlegesen illeszkedik a pénzérme palástjához.

- c) Milyen magasan van felső lapja a vízfelszín felett? **(-0,37 mm)**
- d) Milyen magasságúnak kellene lennie a 22 mm átmérőjű egyforintosnak, hogy a felső lapja éppen a távoli vízfelszínnel egymagasságban legyen? **(0,78 mm)**

**.a)** A kerület mentén a palástra (a víz által kifejtett) emelőerő és az érme ható nehézségi erő számolható, de az utóbbi nagyobb! ( $1,604\pi \cdot 10^{-3}$  N;  $3,267\pi \cdot 10^{-3}$  N). Mi biztosítja az egyensúlyt? Az érme fölötti és alatti nyomások eltérőek, ebből erő származik.

**.b)** Paraméteresen számolva,  $d$  és  $h$  kapcsolatára  $dh = \frac{4\alpha}{(\rho - \rho_{\text{víz}})g}$  adódik.

**.31)**

**.a)** 0,02 N/m felületi feszültségű szappanoldatból *levegőbe fújt* 10 cm és 2 cm átmérőjű buborékok belsejében lévő nyomások mennyivel különböznek? **(6,4 Pa)**

**.b)** Mekkora sugarú lenne az ezen *folyadék belsejében* lévő buborék, melynek belsejében a görbületi nyomás a normál légnyomással lenne egyenlő? **(0,4 μm)**

**.c)** Egy üvegső közepén elzárt csap van, és a cső mindkét végén van egy-egy buborék, melyek mérete különböző. A csapot kinyitva a cső két oldalát (velük együtt a két buborékban lévő gázt is) összenyitjuk. Mi történik a buborékok méretével? **(nagy buborék mérete nő, a kicsi csökken, és eltűnik)**

**.a)** A két gömbfelületről származó görbületi nyomás összesen  $p_g=4\alpha/r$ .

**.b)** Ez a buborék teljesen a folyadékban van, csak egy gömbfelület határolja:  $p_g=2\alpha/r$ .

**.c)** A buborékok belsejében a külső nyomást (a görbületi nyomással meghaladó) nyomás van.

**.32)**

**.a)** 0,5 cm<sup>3</sup> térfogatú, 0,02 N/m határfelületi feszültségű szappanoldatból 3 Pa nyomással mekkora sugarú buborékot fújatunk, és mekkora lesz ennek a falvastagsága? **(2,67 cm; 0,0558 mm)**

**.b)** Felemelkedik-e ha a buborékot földgáz tölti meg? ( $\rho_{f.gáz} = 0,720 \frac{kg}{m^3}$ ;  $\rho_{lev} = 1,29 \frac{kg}{m^3}$ ) **(nem)**

**.c)** Mekkora sugarú buborékot kellene fújnunk földgázból (a gázcsövet az oldatba mártjuk, kiemeljük, és a növekvő buborékot rázással „önállósítjuk”) ahhoz, hogy a buborék felfelé emelkedjen a levegőben?

**(5,94 cm-nél nagyobb)**

**.a)** Tegyük fel, hogy a buborék falvastagsága elhanyagolható a sugarához képest! Ekkor a görbületi nyomás ( $4\alpha/r$ ) éppen 3 Pa.

A falvastagsághoz a folyadéktérfogatot osszuk el a buborékfelszínnel! (kicsi falvastagság miatt jó közelítés. A feltételezés jogos volt, mert a falvastagság így is csak 2 ezreléke az átmérőnek.

**.b)** A ható erők: felhajtóerő a levegőben (1,03 mN), nehézségi erő a folyadékra (5 mN) és a földgázra (0,574 μN).

**.c)** A három erő egyensúlyt tart lebegés esetén.

.33)

- a) Mutassuk meg, hogy az egymástól  $d$  távolságban lévő párhuzamos lemezek között a víz csak feleakkora magasságig emelkedik mint a  $d$  átmérőjű kapilláris csőben!
- b) Mutassuk meg, hogy az egymással kis szöget bezáró lemezek között felemelkedő víz esetén az emelkedés magassága fordítottan arányos a közös éltől mért távolsággal. (Hiperbola alak.)

.a) A  $d$  távolságú lemezek között  $h$  magasságba emelkedő tökéletesen nedvesítő víztérfogatból válasszunk ki egy  $\Delta x$  szélességű réteget. Ennek súlyával az a két erő tart egyensúlyt, amelyik a legfelül a  $\Delta x$  hosszú szakaszokra hat.

Adódik:  $h = \frac{2\alpha}{d\rho g}$ . Csőnél  $d\pi\alpha$  erő tartja a folyadékhenger súlyát.

.b) A lemezek közötti folyadéktérfogatból, a metszésvonaltól  $x$  távolságban, most is egy  $\Delta x$  szélességű réteget vágjuk ki, csak hogy most  $\Delta x$  nagyon kicsi legyen. Az előző pontból átvehetjük az emelkedési magasságot:  $h(x) = \frac{2\alpha}{d(x)\rho g}$ , ahol  $d(x)$  a lemezek távolsága a metszésvonaltól  $x$  távol. A geometriából látható,  $d(x)$  egyenesen arányos  $x$ -szel. (Ui.: az  $x$  magasságú,  $d(x)$  alapú egyenlőszárú háromszögek hasonlóak.)

### III. Folyadékok és gázok áramlása

**.34)** A  $d_o = 1\text{ cm}$  átmérőjű, kör keresztmetszetű csapból folyamatosan kifolyó vízszöglet átmérője a csap aljától számított  $h = 16\text{ cm}$  mélységben már csak  $d_1 = 0,6\text{ cm}$  átmérőjű. Mekkora sebességgel ömlik a víz a csapból? **(0,476 m/s)**

**.a)** A kontinuitási egyenlet ( $Av = \text{áll.}$ ) a két sebesség közötti arányt adja meg:  $v_1/v_2 = (d_2/d_1)^2$ .

**.35)** Egy asztalon álló széles, nagy edényben  $h$  magasságban áll a víz. Az edény oldalán  $x$  magasságban kis méretű nyílás van.

a) Az edény szélétől milyen messzire éri el az asztalt a lyukon kifolyó vízszöglet?  $\left(2\sqrt{x(h-x)}\right)$

b) Hol kellene fúrni a lyukat, ha azt szeretnénk, hogy a lehető legtávolabbra spricceljen a lyukból kifolyó vízszöglet? **( $h/2$ )**

**.a)** A kifolyási sebessége a kontinuitási egyenletből adódik (széles szájú edény, kicsi nyílás közelítéssel):  $v = \sqrt{2gh}$ .

Az  $x$  távolságot függőlegesen  $t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$  idő alatt teszi meg, ezelett  $vt$  utat tesz meg egy vízcsepp.

**.b)** A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséggel kereshető meg  $x(h-x)$  maximuma

**.36)** A Mariotte-palack egy dugóval lezárt merev edény, melynek dugója szorosan át van szúrva egy szívószállal. A szívószál alsó vége a palackban lévő víz szintje alá ér. A palack oldalán egymás fölött apró lyukak vannak, melyeken a víz kifolyhat a palackból.

Meglepő, hogy – míg a kupak nélküli palackból a lyukakon kifolyó folyadékszöglet sebessége egyre csökken, ahogy a palackból fogy a víz- addig a Mariotte-palackból a szívószál alatti lyukakon kifolyó víz sebessége állandó, nem csökken a palackbeli vízszinttel együtt.

**.a)** Mi az oka ennek?

**.b)** Mit mondhatunk a szívószál alja feletti lyukaknál a kifolyási sebességről?

**.c)** Készítsünk ilyen palackot és tanulmányozzuk a kifolyást! Tapasztalataink segítenek megtalálni a pontos magyarázatot!

**.a)** A légmentesen záró kupakon átdugott szívószál a külső légnyomás értékét biztosítja a szívószál aljának magasságában a folyadékban belül, így az ez alatt lévő kifolyónyílásnál a folyadék belsejében a nyomás mindig ugyanakkora. Ezért a kifolyás sebessége mindaddig állandó, amíg a palackbeli folyadékszint nem ér a szívószál aljához.

**.b)** Ezen lyukakon belül kisebb a nyomás mint kint!

**.37)** Vízszintes csőben levegő áramlik, miközben hozzá csatlakozik egy függőlegesen lefelé induló (nem kapilláris) csőtoldalék, melynek alsó vége  $0,92\text{ g/cm}^3$  sűrűségű folyadékba nyúlik. (Porlasztó elve - Csonka János)

a) Milyen magasra emelkedik a csőben a folyadék, ha  $12\text{ m/s}$  sebességgel áramlik a levegő (sűrűsége  $1,29\text{ kg/m}^3$ )? **(1,01 cm)**

b) Mekkora sebességgel kell áramolnia a levegőnek, hogy a folyadék a vízszintes csőig,  $3\text{ cm}$  magasságig felemelkedjen és azt az áramló levegő cseppjeire porlassza? **(20,7 m/s)**

A Bernoulli-törvény szerint a benzincső fölött lecsökken a nyomás  $p_o + 0 = p + \frac{1}{2}\rho_{lev}v^2$ .

A benzintartály szintjén a csőben a nyomás kint és bent azonos:  $p + h\rho_{benz}g = p_o$ .

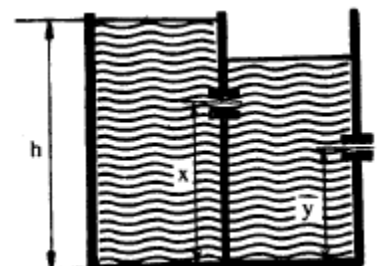
**.38)** Két medencén két azonos keresztmetszetű kifolyónyílás van. Legyen  $h = 10\text{ cm}$ ,  $y = 4\text{ cm}$ . Az átfolyó  $x$  magassága változtatható.

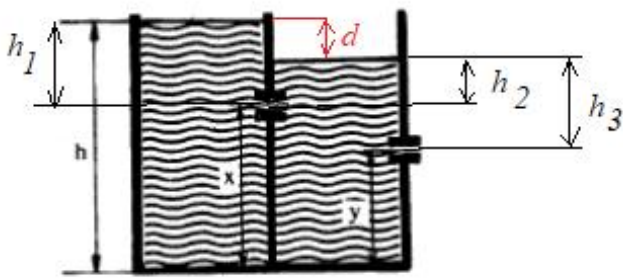
Milyen magasra lesz a víz a jobb oldali medencében, ha sokáig várunk és a bal oldali medencében ezalatt végig biztosítjuk az azonos  $h$  magasságot?

Válaszainkat  $x = 6\text{ cm}$ ;  $2\text{ cm}$ ;  $8\text{ cm}$  esetén adjuk meg. **(7 cm; 7 cm; 6 cm)**

Sokáig várva, a jobboldali vízszint stabilizálódik.

Tegyük fel, hogy a jobboldali folyadékszint az átfolyó felett helyezkedik el!





$$p_o + \frac{1}{2}\rho v_2^2, \text{ azaz } h_3\rho g = \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Viszont a stabilizálódó szintek miatt az *egyenlő keresztmetszetű* átfolyón és a kifolyón *ugyanannyi folyadék* folyik át időegység alatt, azaz  $v_1=v_2$ , emiatt  $d=h_1-h_2=h_3$  szükséges. Ezért az ábrán a jobb tartály felső folyadékszintje félúton van a  $h$  és  $y$  magasságok között, tehát a talajtól  $(h+y)/2=7\text{ cm}$  magasan, *függetlenül  $x$  értékétől!* Ámde csakis  $h-d \geq x$  mellett, amikor a jobb folyadékfelszín az átfolyó felett van.  $x=6\text{ cm}$  és  $2\text{ cm}$  esetén ez valósul meg.

Ha a *jobb oldali folyadékszint az átfolyó alatt* helyezkedik el, akkor  $h_1\rho g = \frac{1}{2}\rho v_1^2$  és  $h_3\rho g = \frac{1}{2}\rho v_2^2$ , ezért a sebességek egyenlősége miatt  $h_1=h_3$  szükséges, azaz  $h-x=h_3$  magasan van a kifolyó felett a folyadékszint.  $x=8\text{ cm}$  esetén a talajtól  $2\text{ cm} + y = 6\text{ cm}$  magasan.

**.39)** Gyerekek a strandon a gumilabdát a víz alá nyomják, elengedik és azt vizsgálják, milyen magasra ugrik ki a vízből. Nagyobb mélységből indítva nagyobb magasságra számítanak, de a tapasztalatok szerint nem függ a kiugrási magasság az indítási mélységtől.

a) Vajon miért?

b) Végezzünk becslést arra, hogy az  $R$  sugarú kemény gumilabda, aminek úszáskor az  $1/10$ -ed része merül a vízbe, milyen magasra ugrik ki a vízből! A labdát jó mélyre víz alá nyomjuk és elengedjük. *Tekintsünk el* az erők változásától az alatt az idő alatt, amíg a labda áthalad a *vízfelszínen*. Gömbre a közegellenállási alaktényező  $c=0,4$ . **(3R)**

Egy (rövid)idő után állandósult sebesség alakul ki, miközben a felhajtóerő egyensúlyt tart a nehézségi és a közegellenállási erővel. Ebből  $v^2=6Rg$ . Ezzel a sebességgel ugrik ki a labda függőleges hajítással.

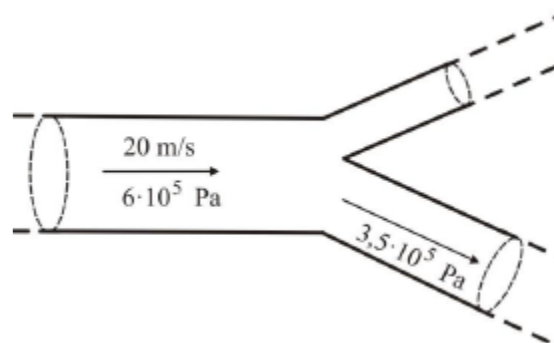
**.41)** Egy hosszabb csőhálózat rövid, vízszintes, elágazó szakaszát mutatja az ábra. Az elágazás előtt a cső keresztmetszete  $8\text{ cm}^2$ -es, majd az elágazás után az egyik ág keresztmetszete  $2\text{ cm}^2$ , míg a másiké  $3\text{ cm}^2$ .

A csövekben állandósult sebességgel, örvénymentesen víz áramlik, a  $8\text{ cm}^2$  keresztmetszetű főágban a víz sebessége  $20\text{ m/s}$ .

Nyomásmérő segítségével megállapíthatjuk, hogy az elágazás előtt a víz (statikus) nyomása  $6 \cdot 10^5\text{ Pa}$ , míg az elágazás után a vastagabb csőben a nyomás  $3,5 \cdot 10^5\text{ Pa}$ -ra csökken. A csőhálózatban ezt követően sehol sincs elágazás. (Az elágazás közeli környezetében a víz viszkozitását, vagyis belső súrlódását elhanyagolhatjuk.)

a) Mekkora a nyomás az elágazás utáni vékonyabb csőben? **( $1,875 \cdot 10^5\text{ Pa}$ )**

b) Mennyi víz folyik ki percenként az elágazás utáni két mellékág végén külön-külön? **( $0,42\text{ m}^3$ ;  $0,54\text{ m}^3$ )**



.a) A kontinuitási egyenlet:  $Av=A_2v_2+A_3v_3$ .

Bernoulli-t. (olyan áramvonalra, mely a felső bal oldaliból a felső csőbe megy tovább):  $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

és (olyan áramvonalra, mely a felső bal oldaliból az alsó csőbe megy tovább):  $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2$ .

Az ismeretlenek  $p_2$ ,  $v_2$  és  $v_3$ .

.b)  $t$  idő alatt  $vt$  magas,  $A$  keresztmetszetű hengerbeli víztér fogat folyik át.

## IV. Vegyes feladatok

**.42)** Egy  $4 \text{ cm}^2$  belső keresztmetszetű üvegcsőből közlekedőedényt hajlítunk. Az egyik szár függőleges, a másik  $45^\circ$ -os szöget zár be a vízszintessel. A közlekedőedénybe  $60 \text{ cm}^3$  higanyt töltünk, majd a függőleges szárba  $80 \text{ cm}^3$  vizet öntünk.

- Mennyivel változik a két szárban a higany szintje a víz betöltése után? (**0,61 cm; 0,86 cm**)
- Milyen hosszú vízoszlopot kellene a függőleges szárba önteni, hogy abban már ne maradjon higany? (**144 cm**)
- 180 cm-es vízoszlop esetén mennyi lesz a függőleges szintkülönbség a két szárban lévő folyadékok felső szintjei között? (**134 cm**)

**.a)** A higany 15 cm, a víz 20 cm hosszú oszlop.

Feltéve, hogy a függőleges szárban még marad higany, jelölje  $x$  azt, hogy a kezdetben betöltött higanyt mennyivel nyomja lefelé a függőleges szárban a víz. Ennyivel nyomja odébb a ferde szárban is a higanyt *a cső mentén*!

A nyomások megegyezését a két folyadék érintkezésének magasságában írjuk fel. A higanyszintek különbsége  $x + \frac{x}{\sqrt{2}}$ .

**.b)** A függőleges szárban csak víz van. A 15 cm hosszú higany  $45^\circ$ -os helyzetben tart egyensúlyt vele.

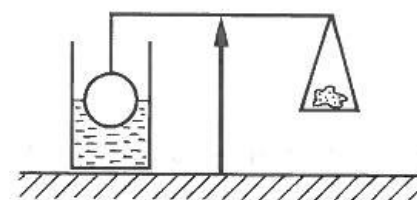
**.c)** Víz is átmegy a ferde szárba. A választott vízszintes sík a két folyadék érintkezésénél legyen.

**.43)** Egy gömböt félig vízbe merítünk, az ábra szerint. Az így mért súlya 20 %-kal nagyobb, mint ha egészen vízbe merítjük. Mennyi a gömb sűrűsége? ( **$3500 \text{ kg/m}^3$** )

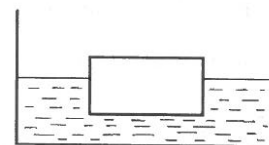
Teljes bekerülésnél az erők egyensúlya:  $T = mg - F_f$

Fél bekerülésnél:  $1,2T = mg - \frac{1}{2}F_f$

A  $T$  erő kiejtése után  $mg$  és  $F_f$  aránya megkapható, ami egyben a sűrűségek aránya is.



**.44)** Egy  $250 \text{ m}^2$  alapterületű medencében  $6 \times 10 \text{ m}$  alapterületű téglatest úszik. A víz szintje ekkor 2 m-rel alacsonyabb a medence szélénél. Az úszó testre ezután 50 tonna terhet rakunk, majd a medencét 1 m átmérőjű csövön keresztül színültig töltjük vízzel.



- Mennyit süllyedt az úszó test a terheléskor a parthoz képest? (**0,633 m**)
- Mennyi vizet kellett a medencébe vezetni? ( **$450 \text{ m}^3$** )
- Mennyi ideig tartott a medence feltöltése, ha a csőben  $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  sebességgel áramlott a víz? (**191 s**)

**.a)** A téglatestnek 50 tonnányi vízzel többet kell kiszorítania, így  $\frac{5}{6} \text{ m}$ -rel jobban kell bemerülnie.

Ha a test  $x$ -szel mozdul lefelé a falhoz képest, akkor az alóla,  $60 \text{ m}^2$  alapterületen kiszorított víz a maradék  $190 \text{ m}^2$ -en oszlik szét így a vízszintet a falhoz képest  $\frac{6}{19}x$ -szel emeli, így a testhez képest a vízszint  $(1 + \frac{6}{19})x$ -szel nő.

**.b)** A vízszintet a rajta úszó testtel együtt  $1,8 \text{ m}$ -rel kell megemelni.

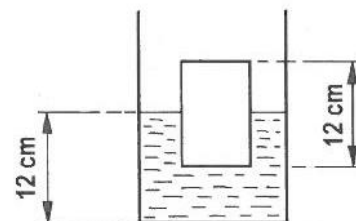
**.c)** Henger alakú csövön áramlik át ez a víztérfogat, melynek magassága  $vt$ .

**.45)** Egy  $5 \text{ dm}^2$  területű deszka úszik a vízben. Egy kődarabot a deszkára helyezve, a deszka 4 mm-rel mélyebbre merül. Ugyanezt a követ alulról a deszkára akasztva, a deszka merülése az eredetihez képest csak 2,4 mm-rel növekszik. Mennyi a kő sűrűsége? ( **$2,50 \text{ g/cm}^3$** )

Kezdetben mindkét test tömegének megfelelő vízmennyiséget a deszka szorítja ki, a végén pedig a kő teljes térfogatával és a deszka együtt. Így a kő térfogata éppen a deszka két bemerülésének térfogatkülönbsége. A kő tömege a deszka 4 mm-es bemerülése által kiszorított víz tömegével egyenlő.

**.46)** Hengeres edény vízében 12 cm magas hasáb úszik. Az edény keresztmetszete kétszerese a hasábénak. A hasáb sűrűsége fele a vízének. Az edényben a folyadékszint kezdetben 12 cm magas. Ezután a hasábot lassan az edény aljára nyomjuk.

- Ábrázoljuk a lenyomáshoz szükséges erőt az elmozdulás függvényében, miközben a hasábot lassan az edény aljára nyomjuk. ( **$F_{\text{max}} = 5,40 \text{ N}$** )
- Mennyi munkát végeztünk? (**0,243 J**)



A hasábot összesen 6 cm-rel kell elmozdítani. Az első szakaszban nincs teljesen a víz alatt, ezközben a szükséges erő az elmozdulás lineáris függvénye. A víz alatti szakaszban az erő állandó.

Ha  $x$ -szel mozdul el a pohárhoz képest, akkor az alóla kiszorított  $A$  alapterületű  $x$  magas víztömeg oldalt szintén  $A$  területem oszlik szét,  $x$  magassággal emelve a vízfelszínt a pohárhoz képest, tehát a hasábból  $2x$  rész nyomul a vízbe. Így 3 cm elmozdulás után kerül víz alá.

A munka az  $F(x)$  görbe alatti terület.

**.47)** A Föld körül keringő űrhajóban, egy zárt,  $1 \text{ dm}^3$  belső térfogatú,  $0,5 \text{ kg}$  tömegű edény van. Az edény teljesen tele van vízzel, amelyben a parafa dugó „lebeg”. Az edényt az űrhajós  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  gyorsulással mozgatni kezdi. A víz sűrűsége  $1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , a parafáé  $400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

Milyen irányban és mekkora gyorsulással kezd mozogni a parafa dugó az edényhez képest? ( **$3 \text{ m/s}^2$** )

Az űrhajóhoz rögzített koordináta-rendszerben érvényesek maradnak a Newton-törvények, ha a keringést biztosító centripetális erő mellé a fiktív **centrifugális erőt** is felvesszük, melyek így egymást éppen lerontják. Ekkor *ugyanaz az eset áll fenn, mintha az űrben, mindentől távol lévő űrhajóban kísérleteznénk.*

Az űrhajóhoz képesti (IR-ként kezelhető) rendszerben vizsgálva:

A parafára ható vízrészecskék eredő nyomóereje nem változik, ha a parafát vízre cseréljük, mert ezen erők felületi erők.

A vízre cserélt parafatérfogatra a szomszédos víznek  $m_{\text{víz}}a = V\rho_{\text{víz}}a$  erőt kell kifejtene („felhajtóerő”). Ennek hatására azonban a parafa gyorsulása az űrhajóhoz képest  $a_{\text{parafa}} = \frac{m_{\text{víz}}a}{m_{\text{parafa}}} = \frac{\rho_{\text{víz}}}{\rho_{\text{parafa}}}a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  lesz. Az edényhez képesti gyorsulás  $3 \text{ m/s}^2$  az űrhajós által kifejtett erő irányába (erre van most a „felfelé” irány).

Az edényhez rögzített rendszerben vizsgálva:

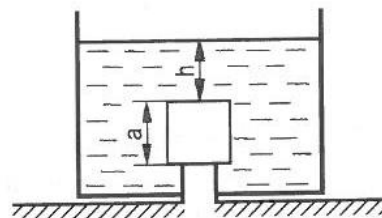
Az IR-nek tekintett űrhajóhoz képest az edény mozogjon balról jobbra  $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  gyorsulással. Ekkor az edényhez rögzített rendszerben **fel kell venni** a jobbról balra mutató  $-ma$  tehetetlenségi erőt, mely térfogati erő. Gondoljunk erre úgy, mint egy jobbról balra ható  $a$  „ $mg$ ”= $ma$  nagyságú nehézségi erőre, melynek iránya kijelöli a „lefelé” irányt és a víz nyugvó ebben a rendszerben. Így – mint ismert - ezzel ellentétesen, balról jobbra, „felfelé” hat egy „felhajtóerő”, melynek nagysága  $V\rho_{\text{víz}}g$ . A két erő eredője  $F_e = V\rho_{\text{víz}}g - ma = V(\rho_{\text{víz}} - \rho_{\text{parafa}})a$ , ami az edény rendszerében gyorsítja a parafát:  $a_{\text{edényhez}} = \frac{F_e}{m_{\text{parafa}}} = \frac{\rho_{\text{víz}} - \rho_{\text{parafa}}}{\rho_{\text{parafa}}}a = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

**.48)** Egy  $620 \text{ kg}$  tömegű  $500 \text{ m}^3$  térfogatú léghajó állandó sebességgel süllyed  $1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  sűrűségű levegőrétegben. Mekkora tömegű testet kell a léghajóból kidobni, hogy ugyanakkora sebességgel emelkedhessen? ( **$40 \text{ kg}$** )

A nehézségi és felhajtóerő számolható lefelé jövet, ebből pedig a közegeellenállási erő:  $mg = F_f + F_k$ . Felfelé menet  $F_f$  változatlan, a közegeellenállási erő irányt vált.

**.49)** Egy edény alján kis peremmel rendelkező kör alakú nyílás van. Erre a peremre ráállítunk egy  $a = 10 \text{ cm}$  élhosszúságú  $600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  sűrűségű fakockát. Miközben a kockát lefelé nyomjuk, annyi vizet öntünk az edénybe, hogy a kocka felső lapját  $h = 5 \text{ cm}$  magas vízoszlop borítsa. Ha ezután elengedjük a kockát, az nem emelkedik fel a vízből. A víz sűrűsége  $1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

Mekkora az edény alján levő nyílás sugara? ( **$2,91 \text{ cm} \leq r < 5,00 \text{ cm}$** )



A kocka alsó lapjára (2 részből áll!) ható nyomóerő kisebbegyenlő kell, hogy legyen a felső lapra ható nyomóerő és a nehézségi erő összegénél.

Ne feledkezzünk meg a légnyomásról!

**.50)** Mekkora a felületienergia-csökkenés, ha két, egyenként  $2 \text{ mm}$  sugarú, gömb alakú higanycsepp egyetlen gömb alakú cseppé egyesül? A higany határfelületi feszültsége levegőkörnyezetben  $0,52 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$ . ( **$1,08 \cdot 10^{-5} \text{ J}$** )

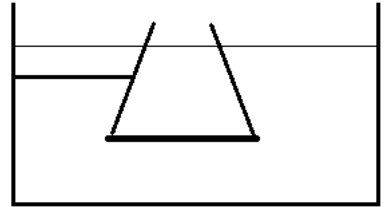
A nagy gömb akkora, hogy térfogata a két kicsi gömbének összege. Így  $R = \sqrt[3]{2}r$ .

A két kicsi gömb együttes felszíne több a nagy gömb felszínénél.

**.51)** Két azonos anyagú golyó hosszú, súlytalan fonállal van összekötve. Sugaraik aránya 2:1, a nagyobb golyóra 10 N nehézségi erő hat. Nagy magasságból leejtve őket, a sebességük idővel állandósul. Melyik golyó halad elől, és mekkora erő feszíti a fonalat? **(nagy; 1 N)**

A nehézségi erők  $mg$  és  $8mg=10\text{ N}$ , a Közegellenállási erők  $F$  és  $4F$ , a kötélerek  $K$  és  $-K$ . Mindkét test egyensúlyban van.

**.52)** Vízbe csonkakúp-palást alakú rögzített edény merül és alsó nyílásához igen kis súlyú lap tapad. Az edényen belül és kívül víz van, az alsó nyíláshoz illeszkedő lap egyensúlyban van. Ekkor az edényben 1 kg víz van. Mi történik, ha a belül levő 1 kg víz helyébe a) 1 kg higany, b) 1 kg alkohol, c) 1 kg-os vassúlyt helyezünk? **(odaszorul, leesik., odaszorul)**



A válasz azon múlik, hogyan változik a betöltött folyadék által a lapra ható nyomóerő.

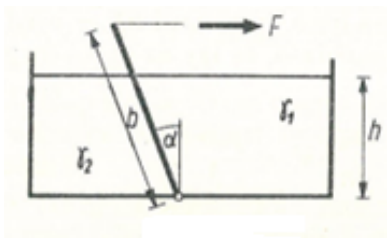
Ez folyadékbetöltés esetén csakis a hidrosztatika nyomás változásától függ, azaz  $h\rho$  mennyiség változása a lényeg.

.a) Az 1kg higany 13,6-szer kisebb térfogatú lesz mint a víz. Az edény pedig lefelé tágul, így a csonkakúp alakú higanytérfogat az eredeti vízmagasságnak kevesebb mint 13,6-od részéig ér. Ezért a  $h\rho$  mennyiség csökken, higany tehát kisebb erővel nyomja a lapot lefelé mint a víz.

.b) Az 1kg alkohol nagyobb térfogatú a víznél (a sűrűségekkel fordítottan arányosan), az edény felfelé szűkül, így az alkoholmagasság nagyobb arányban nő mint a térfogat, azaz mint amilyen arányban csökkent a sűrűség. A  $h\rho$  mennyiség és a lapra ható nyomóerő nő.

.c) A lapra ható nyomóerő pontosan 10 N lesz. Ám ez kevesebb mint a víz által eredetileg kifejtett erő, mert az eredeti víztérfogat erőegyensúlyánál a 10 N-os nehézségi erő mellett még a kúppalást nyomóerejének is van függőlegesen lefelé mutató komponense. Ezek együttesével tartott egyensúlyt a lap tartóereje, így az 10 N-nál nagyobb volt, és ez nem változik most sem, mert a lap alatti folyadéknymomás sem változik.

**.53)** Egy medencét csuklón mozgó,  $b$  hosszúságú fal választ szét két részre. A medence jobb oldali részében  $\rho_1$ , bal oldali részében  $\rho_2$  sűrűségű folyadék van, mindkét oldalon, bármely szögnel, egyenlő  $h$  magasságban. A medencének az ábra síkjára merőleges mérete  $a$ . A falat vízszintesen ható  $F$  erővel tartjuk egyensúlyban. Hogyan függ ennek az erőnek a nagysága a válaszfal  $\alpha$  szögétől?  $\left[ F = \frac{gh^3a(\rho_1-\rho_2)}{6b\cos^3\alpha} \right]$

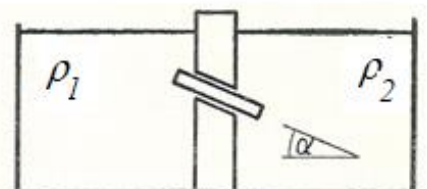


A feladat lényege a forgatónyomatékok egyensúlya.

A folyadékok által kifejtett nyomóerők nagysága a linearitás miatt a félmélységben mért hidrosztatikai nyomásból számolható (a légnyomás erőinek egymást semlegesítik a hatás szempontjából).

ÁMDE! Az egyesített nyomóerők támadáspontját nem bemezőlő rúdrész közepénél, hanem alsó harmadolópontjában kell felvenni! Ld. a 19. feladatot!

**.54)** Egy medencét fal választ ketté, bal oldalán  $\rho_1$ , jobb oldalán  $\rho_2$  sűrűségű folyadék van egyenlő magasságban. Az egyik folyadék alkohol ( $0,8\text{ g/cm}^3$ ), a másik víz ( $1\text{ g/cm}^3$ ). A falban egy elegendő hosszúságú furat van, amelynek hajlásszöge  $\alpha = 30^\circ$ . Ebben a lyukban  $l = 10\text{ cm}$  hosszú,  $\rho = 0,5\text{ g/cm}^3$  sűrűségű fapálca mozoghat súrlódásmentesen, de úgy, hogy a folyadékokat nem engedi összefolyni.



- Melyik folyadék van a bal oldalon? **(víz)**
- Mely helyzetben lesz a pálca egyensúlyban? **(bal vég 7,5 cm mélységben)**
- Milyen az egyensúlyi helyzet stabilitása? **(labilis)**

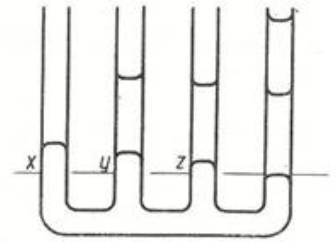
.b) Legyen a pálca bal vége a vízszint alatt  $x$  mélységben! Ekkor a jobb vég a felszín alatt  $x + l\sin\alpha$  mélységben van. A pálca két végére pálcáirányban ható nyomóerők és a nehézségi erő pálcáirányú komponense tartanak egyensúlyt.

Adódik:  $x = \frac{\rho_2 - \rho_f a}{\rho_1 - \rho_2} l \sin \alpha$ .

.a) Ennek a számlálója bármely szereposztás esetén negatív, így a nevezőnek is annak kell lennie, hiszen  $x$  is pozitív.

.c) Az egyensúlyt kifejező egyenletben megnövelve  $x$ -et (jobbra mozdítva a rudat), a balról jobbra ható bal oldali erő meghaladja a jobb oldalit (így méginkább jobbra mozdul a rúd). Csökkentve  $x$ -et, csökken a bal oldali erő a jobb oldaléhoz képest.

.55) Négyágú közlekedőedénybe alul higanyt öntünk. A második szárba 10 cm magas olajréteget, a harmadik szárba 10 cm magas vízréteget, a negyedik csőbe 10 cm magas vízréteget és erre 10 cm magas olajréteget öntünk. Hogyan helyezkednek el a folyadékok az egyes csövekben? A higany sűrűsége  $13,6 \text{ g/cm}^3$ , az olaj sűrűsége  $0,8 \text{ g/cm}^3$ . **(1,32 cm, 0,73 cm, 0,59 cm a 4. csőhöz képest)**



A sűrűségek miatt a szárakban balról jobbra haladva a higanyszintek egyre alacsonyabban vannak.

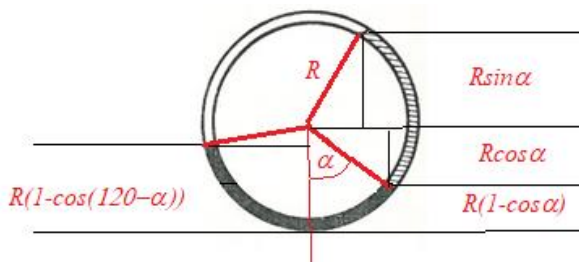
A legalacsonyabb, 4. szárral rendre összehasonlítva a többi szárat, a megfelelő higanyszintek számolhatók a hidrosztatikai nyomások egyenlőségéből.

.56) \*Függőleges síkban lehelyezett, nagy átmérőjű, zárt, kör alakú, rögzített csőbe higanyt és vizet töltünk. A higany összefüggően a cső hosszának harmadát, a víz negyedét tölti ki. Milyen egyensúlyi helyzet alakul ki? ( $\alpha = 56^\circ 37'$ )



Ötlet1 (trigonometrikus addíciós tételeket használ):

Bár felül nem nyitott, de a levegő nyomása mindkét folyadék fölött azonos. Így a két folyadék érintkezésénél felvett vízszintes sík mentén azonosak a nyomások. Ebből  $\sin \alpha$ -t és  $\cos \alpha$ -t tartalmazó, de  $\tan \alpha$ -ra könnyen visszavezethető egyenletet kapunk.



Ötlet2: A két folyadékív közös tömegközéppontja a lehető legalacsonyabban fog elhelyezkedni. A közös tömegközéppont helye meghatározható szinusz- és koszinusz-tételekkel (a függvénytáblázatban megtalálható, hogy az ív mentén vékonyan, homogénen elosztott tömeg esetén a TKP az ív középpontjától  $d = R \frac{2}{\pi} \sin \frac{\alpha}{2}$  távolságra van).

.57) Edényben 10 cm magasan víz van. Az edény fenekén csonkakúp alakú,  $1,2 \text{ g/cm}^3$  sűrűségű, 4,5 cm magasságú gumidugó fekszik, amelynek fedőlap-területe  $4 \text{ cm}^2$ , alapterülete  $9 \text{ cm}^2$ . A csonkakúp térfogata:  $V = \frac{m}{3} (A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2})$

Mekkora erővel nyomja a dugó az edény fenekét? **(0,957N)**



A dugóra ható erő egyensúlyát vizsgáljuk.

A dugó felett lévő víztérfogat súlya könnyen számolható, ha egy  $A_1$  alapterületű vízhasáb súlyából kivonjuk a csonkakúp alakú vízrész súlyát.

.58) Néhány centiméteres fonállal egymáshoz kötött 2 cm rádiuszú parafagömböt és 1 cm rádiuszú ólomgömböt vízbe dobunk. A parafa sűrűsége  $0,2 \text{ g/cm}^3$ , az ólom sűrűsége  $11,3 \text{ g/cm}^3$ .

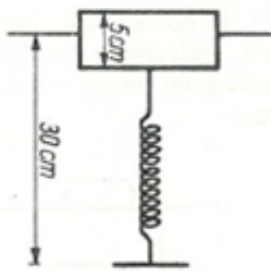
Mi történik? Mekkora erő feszíti a fonalat? **(0,268 N)**

Hogy úszik, vagy lemerül, az az átlagsűrűsége múlik.

Ha lemerül, akkor a parafára ható erők egyensúlyát vizsgáljuk. Ha úszik, akkor az ólomra ható erők egyensúlyát.

.59) Nagy alapterületű edényben lévő vízre 1 cm vastag rétegben  $0,8 \text{ g/cm}^3$  sűrűségű benzint rétegezzünk. Hogyan úszik a folyadékba helyezett 5 cm vastag,  $0,95 \text{ g/cm}^3$  sűrűségű falemez? **(3,95 cm a vízben)**

- A fa a vízben úszik, ezért felső lapja vagy a benzinnel van, vagy a benzin fölött.
- Ha a benzinnel nem állna ki a lemez, akkor legalább akkora felhajtóerő hatna rá, mintha 1 cm lenne a benzinnel és 4 cm a vízben (a víz sűrűsége nagyobb a benzinnél). Ezek összege azonban több a lemez súlyánál.
- Így térfogatának  $1/5$ -e van a benzinnel, és legyen  $\lambda$ -ad része a vízben. Az ebből származó felhajtóerő egyensúlyt tart a nehézségi erővel. és  $\lambda = 0,79$  adódik.



**.60)** Egy rugó eredeti hossza 25 cm, és 10 N terheléstől 20 cm-t nyúlik meg. A rugó egyik végét rögzítjük 30 cm mélyen a vízfelszín alatt, másik végére 5 cm magas,  $0,4 \text{ g/cm}^3$  sűrűségű és 3,2 N súlyú fából készült téglatestet akasztunk. Milyen mélyen merül a téglatest a vízbe? **(2,71 cm)**

A rugóállandó számolható.

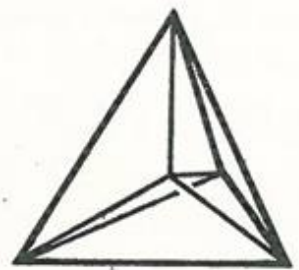
A bemerülő részre ható felhajtóerő egyensúlyt tart a nehézségi erő és a rugóerő összegével.

Ha a téglatest térfogatának  $\lambda$ -ad része van a vízben, akkor a rugó megnyúlása  $(5 - \lambda \cdot 4)$  cm.

**.61)** Drótból készült tetraéder-vázat szappanoldatba mártva az ábra szerint, összesen 6 egyenlőszárú háromszög alakú hártya keletkezik rajta. Milyen arányban kisebb így a

felszín, mintha a négy oldallapot borítaná be a szappanhártya?  $\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)$

A 6 kicsi háromszög közös csúcsa a tetraéder középpontja, mely a tetraéder magasságát az alaphoz közeli negyedelőpontban osztja két részre. Így a kis háromszögek területei könnyen számolhatóak.



**.62)** Vékony üvegcső végéről  $n_1 = 133$  darab vízcsepp esett le. Ugyanazon cső végéről ugyanakkora térfogatú etiléter  $n_2 = 437$  cseppben esett le. Az etiléter sűrűsége  $0,79 \text{ g/cm}^3$ . Mennyi az etiléter felületi feszültsége? **(0,0018 N/m)**

Egy csepp térfogata  $V/n$ , tömege  $V/n \cdot \rho$ . Az ehhez tartozó nehézségi erővel a felületi feszültségből adódó erő tart egyensúlyt, amely viszont a határfelületi feszültséggel arányos. Így tehát  $\rho/n$  arányos a határfelületi feszültséggel.

**.63)** 0,4 mm belső átmérőjű üvegcsővet úgy mártunk higanyba, hogy a csőben a higany fölött  $h = 10 \text{ cm}$  hosszú vízoszlop van. Hogyan helyezkednek el a folyadékszintek? A higany határfelületi feszültsége vízkörnyezetben  $0,375 \text{ N/m}$ , sűrűsége  $13,6 \text{ g/cm}^3$  és illeszkedési szögek mindenütt  $180^\circ$ -osak. **(2,96 cm-rel van az edénybeli higanyszint alatt a víz alsó szintje)**

A víz felső szintjétől a csőbeli higany felső szintjéig haladva, vizsgáljuk a nyomásokat:

A víz felett  $p_0$  légnyomás, a vízfelszín alatt  $p_0 - 2\alpha_{\text{víz}}/R$ , majd  $h$  mélységbe ereszkedve  $p_0 - 2\alpha_{\text{víz}}/R + h\rho_{\text{víz}}g$ , ezután átlépve a határfelületet  $p_0 - 2\alpha_{\text{víz}}/R + h\rho_{\text{víz}}g + 2\alpha_{\text{hg-víz}}/R$ .

Ez a nyomás megegyezik a csövön kívüli  $x = p_0 + x\rho_{\text{hg}}g$  nyomással, mely az edénybeli higanyoszlop magasságából és a külső légnyomásból adódik.

**.64)** Hajszálcső belső átmérője alul  $2R = 0,4 \text{ mm}$ . A cső felfelé szűkül, az alkotó a függőlegessel  $0,84^\circ$ -es szöget zár be. Milyen magasra emelkedik a víz a csőben? Tekintsük a vizet tökéletesen nedvesítő folyadéknak. **(8,09 cm-stabil, avagy 73,8 cm labilis)**

Legyen a felső gömb alakú folyadékfelszín  $r$  sugarú, és jelölje  $h$  annak a pontnak a pohárban lévő folyadékfelszín feletti magasságát, ahol ez a gömb érinti a cső falát. Kapcsolatukra két összefüggés adódik:

A vízszintes távolságok geometriai vizsgálatából adódik:  $r \cdot \cos\varphi + h \cdot \tan\varphi = R$ ,

miközben a csőbeli nyomások vizsgálatából  $h\rho g = \frac{2\alpha}{r}$ . Az egyenletrendszer megoldható.

**.65)** Egy csapból nagyon vékonyan csordogál a vízszög. megfigyelhető, hogy keresztmetszete egy ideig vékonyodik, majd egy helyen cseppekre szakadozik. Adjunk magyarázatot erre!

Egy, a csapból eltávozó kiszemelt vízcsepp sebessége egyre nagyobb lesz a gravitáció miatt, miközben egyre mélyebbre jut. A *kontinuitási egyenlet* szerint így a növekvő mélységgel csökken a vízszög keresztmetszete.

Egy adott, rövid idő alatt kifolyt víztérfogat egyre hosszabb és egyre kisebb keresztmetszetű hengerre válik, amelynek felszíne egyre jelentősebben növekszik, s vele együtt a felületi energia is. (Ez a mozgási energia, így a sebesség csökkenését eredményezi.)

Ha ez a hosszú henger cseppekre szakadozik szét, akkor az összfelület jelentősen lecsökken (a gömb alakú csepp térfogatára vetített felülete a legkisebb), a felszabaduló energia előbb mozgási energiává válhat.

[Innentől -a sebességnövekedés miatt- a közegellenállási erő is szerephez jut.]

**.66)** Mutassuk ki, hogy a buborék belsejében a görbületi nyomás  $4\gamma/r$  !

Fújjuk egy kissé nagyobbra az elhanyagolható vastagságú buborékot! A sugár  $\Delta R$  növelésekor a felület megnövelése miatti felületi-energia növekedés forrása az általunk végzett munka.

Ha a belső nyomás a külsőnél  $p$ -vel nagyobb, akkor a munkánk  $p \cdot 4\pi R^2 \cdot \Delta R$ , miközben a felületi energia  $\sigma \cdot [4\pi(R + \Delta R)^2 - 4\pi R^2]$  -tel nő. A másodrendűen kicsi tagot hanyagoljuk el!

**.67)** Nagy alapterületű lapos edénybe (tepsi) vizet töltünk és az edényt középen egy kicsi felületen támasztunk alá. Az edényben lévő vízfelületre óvatosan egy fadarabot helyezünk és elengedünk. A fadarab nem ér hozzá az edény aljához. Lebillen-e az alátámasztásról az edény, ha a fadarabot ....

- a) .... az edény közepén,
- b) .....az edény szélén helyezzük a vízfelszínre?
- c) Mi történik, a fenti esetekben, ha a fadarab a sekély vízmélység miatt az edény aljához ér?
- d) Mi történik a fenti esetekben, ha a fadarab helyett vasdarabot használunk?

.a-b) Az úszó fadarab megemeli a vízmagasságot az edényben mindenütt *ugyanannyival*, ezért a fenélapra ható nyomóerő egyenletesen, így *szimmetrikusan* oszlik szét, a tálca nem billen le.

.c) Ha a fa a tálca aljához ér, azon a ponton nyomni fogja azt, és ha ez nem középen van, a tálca lebillen.

.d) A vas mindenképpen a tálca aljára kerül és egy ponton nyomva azt, ha nem középen van, lebillen.