

7-Egyensúly

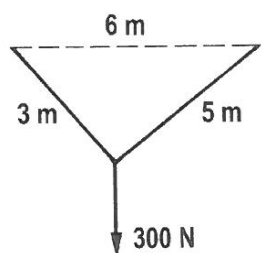
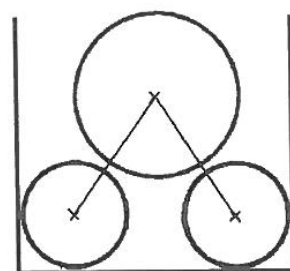
.1) Légszaváros szán $v_1 = 6$ m/s sebességgel halad kis hajlásszögű lejtőn felfelé. Ugyanezen a lejtőn lefelé $v_2 = 8$ m/s a sebessége, változatlan teljesítmény mellett. A légellenállástól eltekintünk.

- .a)** Mekkora lesz a sebessége az ugyanolyan súrlódási együtthatójú vízszintes úton, ha motorjának teljesítménye továbbra is változatlan? **(6,86 m/s)**
- .b)** És ha a lejtő szöge 30° ? **(5,94 m/s)**
- .c)** Legfeljebb milyen magas lejtőn mehet fel ekkora teljesítménnyel? **(bármekkora, ha a légszavar legalább mg erőt tud kifejteni)**

.2) Hajlékony, igen hosszú kötel minden métere 20 N súlyú. A kötel 10 m magasán levő álló csigán van átvetve és szabad végén 15 kg tömegű test lóg. A kötel többi része a talajon fekszik. A súrlódástól eltekintünk. Milyen egyensúlyi helyzet hozható létre? **(A test 7,5 m magasán van egyensúlyi helyzetben, amely labilis)**

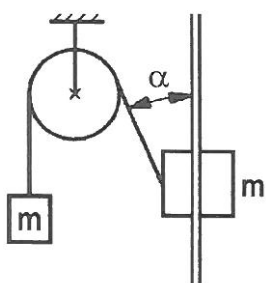
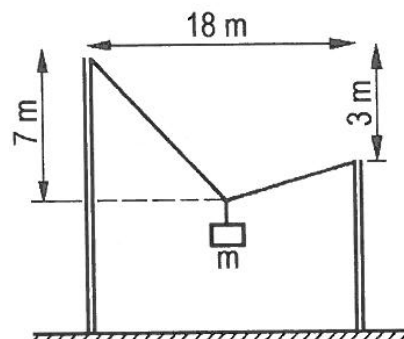
.3) 50 cm széles téglalap keresztmetszetű vályúban 10 cm sugarú 200 N súlyú fémhengerek fekszenek. Ezek 15 cm sugarú, 600 N súlyú harmadik henger van.

- .a)** Mekkora erők hatnak a vályú falaira? **(Az oldallapokra 225 N; az alaplagra 1000 N)**
- .b)** Ugyanolyan anyagból készített 15 és 10 cm sugarú hengerek esetén mekkora legyen a vályú szélessége, hogy a kicsi hengerek az alaplapot akkora erővel nyomják mint az oldalfalakat? **(64,2 cm)**



.4) 3 m és 5 m hosszú fonálon 300 N súlyú test függ. A fonalak végpontjai 6 m távolságban, azonos magasságban vannak rögzítve. Mekkora erők hatnak a fonalakban? **(167,0 N; 260,6 N)**

.5) Egymástól 18 m távolságban levő különböző magasságú lámpaoszlopok között kifeszített huzalon 150 N súlyú lámpa függ, az oszlopoktól egyenlő távolságra. Mekkora erő feszíti a huzal két ágát, ha a lámpa a bal oldali horog alatt 7 m-re van, és a jobb oldali horog 3 m-rel lejjebb van a bal oldalinal? **(155,5 N; 134,3 N)**



.6) Az ábra szerinti elrendezésben a rögzített függőleges oszlopon az m tömegű test $\mu = 0,3$ mellett csúszhat a rúdon. A testet tartva, vízszintes kötélpontból indulva, nagyon lassan egyre lejjebb eresztjük, amíg magára hagyva meg nem áll.

.a) Milyen α szögnél van ez az egyensúlyi helyzet? Mekkora most a súrlódási erő?

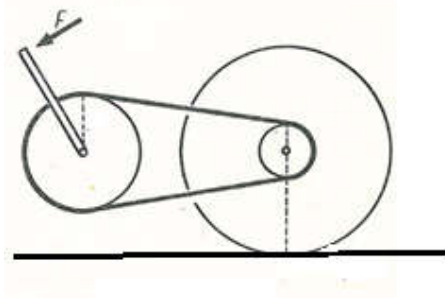
$$(\sin \alpha = \frac{2\mu}{1+\mu^2}; \alpha = 33,39^\circ; 0,165 \cdot mg)$$

.b) Mi történik a testtel, ha lefelé, $\alpha = 20^\circ$ -os szögig húzzuk le, majd magára hagyjuk? Mekkora elengedéskor a súrlódási erő? **(ott marad; ; 0,060 $\cdot mg$)**

.c) Milyen ennek az egyensúlyi helyzetnek a stabilitása? Mi történik, ha most a testet kicsit felfelé, avagy lefelé kitérítve, magára hagyjuk? **(felfelé: stabil; lefelé: közömbös)**

.7) Kerékpár pedálkarjának hossza 20 cm, a hátsó kerék sugara 35 cm. A pedál által hajtott fogaskerék és a hátsó kerék fogaskerekein az egyforma nagyságú fogak száma 48 és 17.

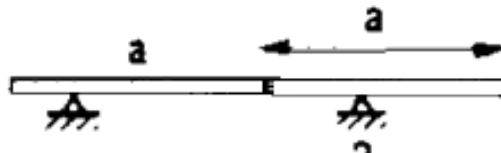
Ha a pedált F erővel nyomjuk, mekkora erő „viszi előre” a kerékpárt, illetve mekkora a kerék és a pedál fordulatszámának aránya? **(0,202F; 2,82)**



Takarítható-e meg munka ahhoz képest, mintha a kerékpárt akkora erővel tolnánk, mint az imént a kerék alatt ébredő erő? **(nem)**

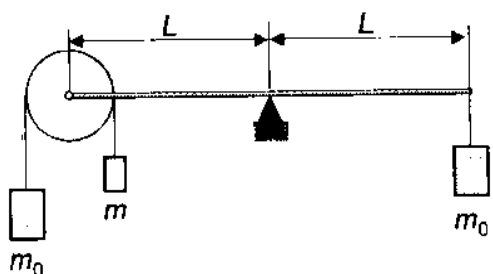
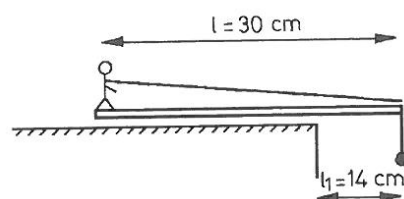
.8) Két teljesen azonos geometriai méretű, de különböző anyagból készült homogén gerenda közül az egyiket, az ábra szerint hosszúságának egynegyed részénél, a másikat hosszának egyötöd részénél alátámasztjuk úgy, hogy az első gerenda hosszabbik vége a második gerenda rövidebbik végén fekszik fel. Ekkor egyensúlyban van.

- a) Mekkora erővel hat egymásra a két gerenda, ha az első gerenda súlya 900 N ? **(300 N)**
 b) Mekkora a két gerenda anyagsűrűségének aránya? **(4,5)**



.9) Két egyenlő hosszúságú, egyenlő súlyú homogén rudat súrlódásmentes csukló köt össze. A bal oldali rudat az ábra szerint negyedénél támasztjuk alá. Hol kell alátámasztani a másik rudat, hogy egyensúlyban legyenek? **(a bal oldali harmadolópontban).**

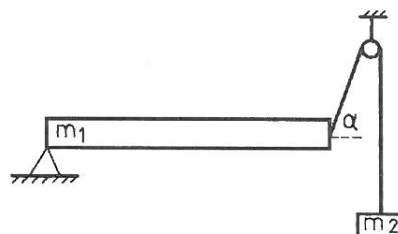
.10) Az ábrán látható pici bábu elindul az asztalra helyezett 55 g tömegű deszkán. Egy-egy lépése $0,5\text{ cm}$ és $0,75\text{ s}$ -ig tart. A bábu tömege 10 g , a nehezék tömege 1 g , a fonal hossza 30 cm , tömege elhanyagolható. Mennyi ideig haladhat a bábu a deszkán? **(30,15 s)**



.11) Egyenlőkarú emelő egyik végére elhanyagolható tömegű korong van szerelve. A korongról lelógó fonal végeire m_0 és m tömegű testeket akasztottunk, az emelő másik oldalán m_0 tömegű test függ. Mekkora legyen a fonal másik végén függő test m tömege, hogy a rendszert magára hagyva, az emelő vízszintes helyzetben maradjon? **($m_0/3$)**

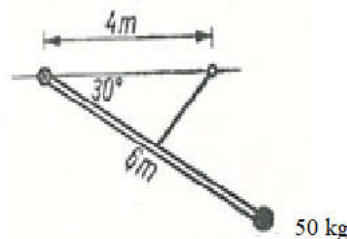
.12) Homogén rúd egyik végét csuklósan alátámasztjuk, a másik végéhez erősített kötelet súrlódásmentes tengelyű csigán átvetjük úgy, hogy a köté a vízszintessel 60° -os szöget zár be. A rúd hossza 2 m , tömege 40 kg . A köté másik végén m_2 tömegű test függ.

- a) Mekkora az m_2 egyensúly esetén? **(23,1 kg)**
 b) Mekkora az állócsiga felfüggesztésére ható erő? **(277,6 N)**
 c) Mekkora az alátámasztásra ható erő? **(231 N)**
 d) Szerkesztéssel is határozzuk meg az alátámasztó erő irányát.

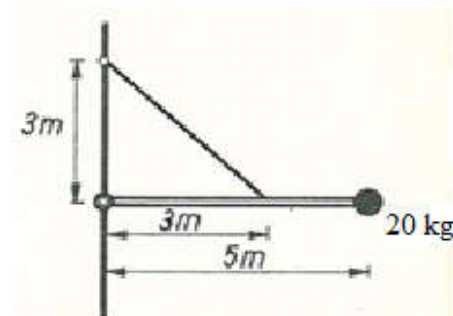


.13) Az ábra szerinti elrendezésben egy 6 m hosszú súlytalan rúd egyik végét csuklóban rögzítjük. A rúd másik végén 50 kg -os teher van. A rúd közepét fonal tartja 30° -os helyzetben.

- a) Mekkora erő feszíti a fonalat és nyomja a csuklót? **(889 N; 640N)**
 b) Szerkesztéssel is határozzuk meg a fonal és a csuklóerő vektorainak nagyságát és irányát!

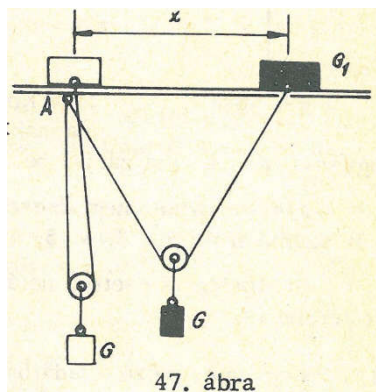
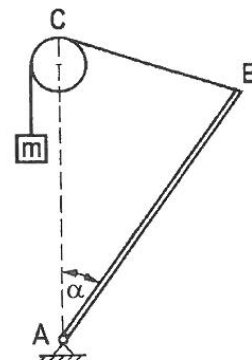


.14) Az ábra elrendezése szerint egy súlytalan csuklós rúd 20 kg terhet tart. Mekkora erő hat a fonálban és a csuklóra? Számoljunk és szerkesszünk! **(471 N; 359 N)**



.15) Az ábrán látható elrendezésben $\overline{AB}$ rúd tömege 10 kg, és az alsó végéhez erősített vízszintes tengely körül foroghat. A rúd felső végéhez erősített csigán átvett fonálon m tömegű test függ. A csiga tengelye és a rúd tengelye ugyanazon függőleges egyenesre esik úgy, hogy $\overline{AC} = \overline{AB}$. (Útmutatás: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$)

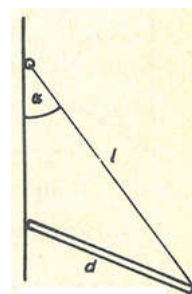
- a.) Mekkora α szög esetén van a rendszer egyensúlyban $m=5$ kg, és $m=2,5$ kg esetén?
(60,00°; 28,96°)
- b.) Mekkora és milyen irányú erővel hat a rúd a tengelyre $m=5$ kg, és $m=2,5$ kg esetén?
(86,6 N, 30° a függőlegeshez, illetve 96,82 N, 75,53° a függőlegeshez)



47. ábra

.16) Fonál egyik végét vízszintes gerenda A pontjához, másik végét a gerendán elcsúsztatható G_1 súlyú testhez kötjük. A fonál két szára közé elhanyagolható tömegű mozgócsigát helyezünk, melyet G súllyal terhelünk. Mennyire lehet a G_1 súlyú testet a gerendán az A ponttól eltávolítani, hogy a rendszer még egyensúlyban maradjon. A gerenda és a rajta elcsúsztatható test között a súrlódási együttható μ , a fonál hossza ℓ . (A csigánál a súrlódás elhanyagolható.) Legyen $G = 2 G_1$ és $\mu = \frac{4}{15}$.
($x \leq 8/17\ell$)

.17) Az ábra szerinti elrendezésben egy d hosszúságú rúd egyik végét l hosszúságú fonál tartja, másik végét teljesen sima falnak támasztjuk, majd a rendszert magára hagyjuk és egyensúlyban marad. $d/l = \sqrt{5/8}$



- a.) Milyen helyzetben áll az egyensúlyi helyzetű rúd? ($\alpha=45^\circ$)
- b.) Határozzuk meg a fal és a kötél által kifejtett erő nagyságát! ($mg; \sqrt{2}mg$)
- c.) *Hogyan van egyensúlyban a rúd, ha a fal nem teljesen sima?

.18) *Rúd egyik végét fonállal falhoz erősítjük, másik végét az érdes falhoz támasztjuk.

Egyensúly esetén a fonál a fallal α szöget zár be. Legyen $\frac{d}{\ell} = \frac{3}{4}$ (ℓ a fonál, d a rúd hossza)!

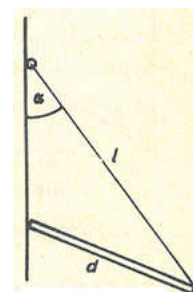
a.) Mekkora erő feszíti a fonalat és legalább mekkora μ_0 nyugalmi súrlódási együttható esetén jöhet létre egyensúly, ha $\alpha = 45^\circ$, illetve $\alpha = 30^\circ$?

($\mu_0 \geq 0,293$, $K = 1,09 mg$ illetve $\mu_0 \geq 0,504$, $K = 1,63 mg$)

b.) Legyen most $\mu_0 = 0,5$! Milyen a szögek mellett marad a rúd egyensúlyban? (Figyelem!

Szükségesek trigonometrikus összefüggések a magasabb évfolyamokról: $\sin 2\alpha = \dots$, $\cos 2\alpha = \dots$, továbbá ismerni kell az $a \cdot \sin \varphi + b \cdot \cos \varphi = c$ típusú trigonometrikus egyenlet megoldását!)

(30,1° és 47,2° között)



.19) Egy 3 m hosszú 150 N súlyú létrát teljesen sima falnak támasztunk úgy, hogy alsó vége 1,8 m-re van a faltól a vízszintes talajon.

- a.) Határozzuk meg a fal és a talaj által a létrára kifejtett erők nagyságát és irányát! **(56,25 N; 160,2N)**
- b.) Legalább mekkorának kell lennie a tapadási súrlódási együttható értékének a talaj és a létra között, hogy egy 800 N súlyú ember a létra legmagasabb pontjára felállhasson anélkül, hogy a létra megcsúszna? **($\mu \geq 0,6908$)**
- c.) Hogyan változik ekkor a talaj által kifejtett erő iránya? **(20,56°-ról 34,64°-ra nő a hajlásszög a függőlegeshez képest)**

.20) Mekkora szöget zárhat be a fallal az érdes falnak támasztott létra, hogy a talajon el ne csússzon. A nyugalmi súrlódási együttható a talajon μ_1 a fal és a létra között μ_2 . (Legyen $\mu_1 = 0,5$, $\mu_2 = 0,4$.) **($\alpha \leq 51,34^\circ$)**

.21) Mekkora szöget zárhat be a fallal a falnak támasztott létra, hogy az a személy, akinek súlya a létra súlyának k -szorosa fölmelessen a létrán anélkül, hogy a létra elcsúszna. A nyugalmi súrlódási együttható a talajon μ_1 , a fal és a létra között μ_2 . (Legyen $k = 2$, $\mu_1 = 0,5$, $\mu_2 = 0,4$.) **(max. 32,01°)**

.22) Bizonyos hajlásszöggel az érdes falhoz van támasztva egy m tömegű rúd, ami nem csúszik meg. A tapadási súrlódási együttható a talajon 0,5, míg a falnál 0,4. A rúd és a fal szögére: $\tan \alpha = 0,5$.

a.) Számítsuk ki a falnál és a talajon ható erőket. (?!?)

b.) Mi a legkisebb lehetséges legkisebb és legnagyobb értéke a talaj merőleges tartóerejének? (0,9167mg; 1,125mg)

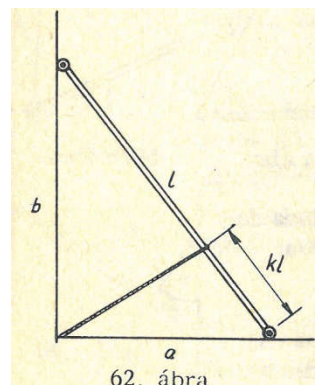
.23) Merőlegesen falszöglethez ℓ hosszúságú, végein görgőkkel ellátott rúd támaszkodik (sem a falnál, sem a talajon nem számolunk súrlódással). A rúd elcsúszását a rúdhoz és a falszöglethez kötött fonál akadályozza meg. A rúd alsó vége a szöglettől a , a felső vége b távolságra van. A fonál a rúd alsó végétől $k\ell$ távolságra van a rúdhoz erősítve.

a.) Mekkora erő feszíti a fonalat, mekkora erővel nyomja a rúd a talajt, illetve a falat?

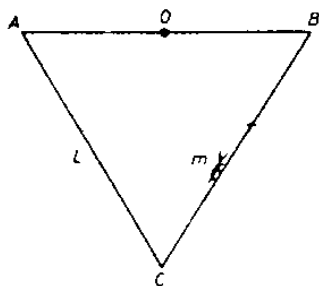
Legyen $k = 1/3$, $a = 4$ m, $b = 15$ m. $\left[\frac{17}{30} mg; \frac{45}{30} mg; \frac{8}{30} mg \right]$

b.) k milyen értékeinél lehetséges egyensúly? ($k < 1/2$)

c.) *Határozzuk meg az erőket csak szerkesztéssel!



62. ábra



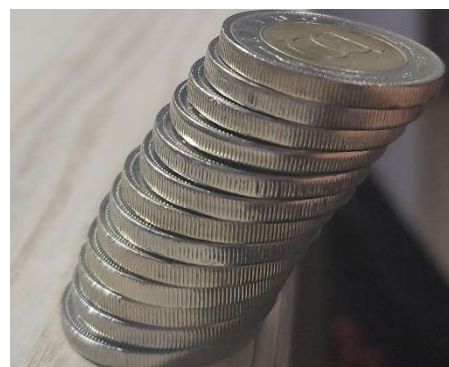
.24) Az ábrán látható egyenlő oldalú háromszög minden oldala ℓ hosszúságú, m tömegű homogén rúd. A háromszög az egyik oldal középpontján átmenő vízszintes tengely körül szabadon foroghat. Egy m tömegű bogár a C ponttól lassan elmászik a B pontig. Mennyi energiájába kerül ez a kaland (mekkora a munkavégzése)? (0,7321 mgl)

.25) Az asztal szélére, a szélén túlnyúló ferde tornyot építünk egyforma pénzérmékből úgy, hogy minden érmét az alatta lévőhöz képest kifelé elcsúsztatunk. Célunk, hogy a legfelső érme e lehető legjobban kilógjon az asztal széléhez képest.

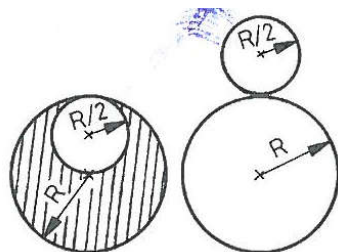
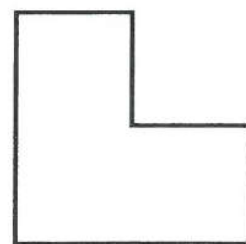
a.) Megvalósítható-e, hogy a legfelső pénzérmének már egyetlen pontja se legyen az asztal fölött? Ha igen, hány érmét kell ehhez felhasználni? (4)

b.) Megvalósítható-e, hogy a legfelső, r sugarú pénzérme külső pontja az asztal szélétől $4r$ távolságra legyen? (igen, 31 érmével)

c.) *Elegendően sok érmét használva mi az a legnagyobb távolság, amivel a torony oldalra kinyúlhat az asztal széléhez képest? (bármekkora)



.26) Vékony lemezből készült négyzet egyik negyede hiányzik. Hol van a tömegközéppontja (súlypontja)? (Az átlón a $\frac{a\sqrt{2}}{12}$ -re a négyzet középpontjától)

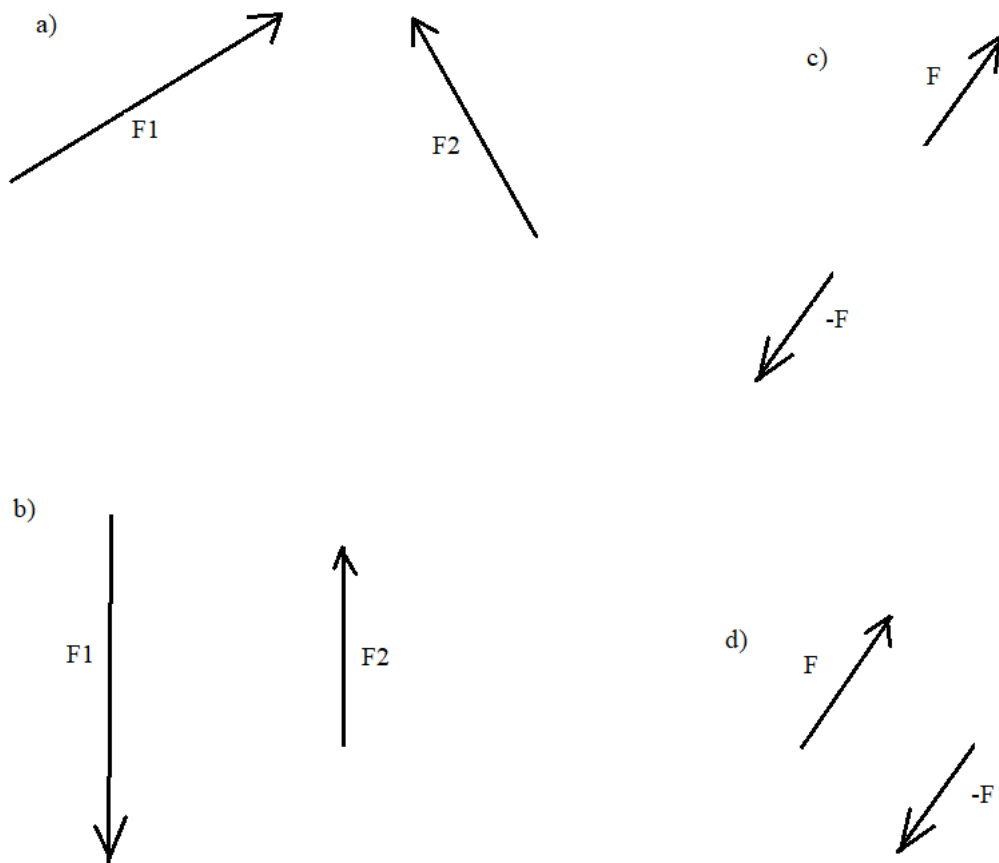


.27) Határozzuk meg az ábrán látható lemezidomok tömegközéppontját!

(A két kör egyenesén, a középponttól $R/6$ távolságra; 0,3R a nagyobb középpontjától felfelé)

.28) Szerkesszük meg merev testre ható 2 db megadott erőt helyettesítő eredőt!

(Azt az egy erőt, ami gyorsító- és forgató hatás szempontjából is helyettesíti a megadottakat.)



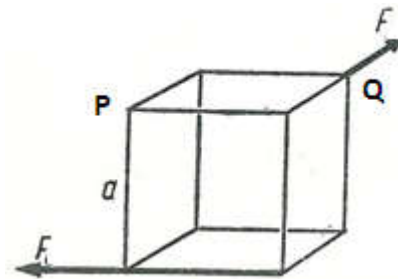
.29) Az R sugarú körbe írt szabályos ötszög alakú síklap 4 db csúcsánál kifelé, a szimmetriatengely mentén azonos F erők hatnak. Összegezzük ezeket a hatás szempontjából úgy, hogy...

.a) ... az ötszög 5. csúcsában hasson egy erő, és az ötszög síkjára merőleges tengelyű alkalmas forgatónyomaték hasson az eredeti erők helyett. Mekkora a forgatónyomaték nagysága? (**F , az 5. csúcsból a középpont felé; $M=0$**)

.b) ... az egyetlen erő az ötszög egyik olyan csúcsában hasson, ahol eredetileg F erő hatott. Mekkora ez az erő és mekkora az e mellé szükséges forgatónyomaték nagysága? (**F , az 5. csúcsból a középpont felé húzott félegyenessel egyirányú; $M = -Fa$, a tengely merőleges az ötszög síkjára**)

.30) Az a élhosszúságú kocka két kitérő élében F erők hatnak. A hatás szempontjából helyettesítsük ezeket az erőket a Q pontban ható egyetlen erővel és alkalmasan választott –erőpárral megvalósított- forgatónyomatékkal. Mekkora a Q pontban ható erő és mekkora a forgatónyomaték, milyen a tengely állása?

(**$\sqrt{2}F$; $Fa\sqrt{2}$; BR irányú**)



.31) Borítsuk fel a kockát és a szabályos tetraédert az egyik élén keresztül, a lehető legkisebb erővel, ha az adott él a síkon nem csúszik meg. Az erőt a felszín valamely szimmetriasíkon lévő pontjában fejtjük ki. Hol hat a lehető legkisebb erő, mekkora a nagysága és milyen az iránya, ha a test homogén anyagú, és tömege m ?

(Segítség: A szabályos tetraéder TKP-ja a testmagasságok metszéspontja, ami minden magasságnak a laphoz közeli negyedelőpontja.) (**kocka: $F = mg/\sqrt{2}$, tetraéder: $F = mg/3$**)

.32) *A súrlódásos síkon áll egy hengerszerű test (vékonyfalú cső vagy tömör henger). Az ábra szerint egy, a vízszintes síkban ható és a paláston támadó erőpárral szeretnénk megforgatni. Mekkora a szükséges erők? (**cső: $\mu mg/2$; henger: $\mu mg/3$**)

(Segítség: Ha a koordináta-rendszerben megrajzoljuk az $f(x)=x^2$ függvény grafikonját, illetve egy téglalapot, melynek egyik csúcsa az origó, a vele szemkötti csúcsa pedig a grafikon tetszőleges pontja, akkor a téglalap területének $1/3$ része esik a (parabola)görbe alá.)

