

5-Erőtörvények



.1) Két 3 kg-os téglá fekszik egymáson az ábra szerint. $\mu = 1/3$. Mekkora erővel lehet egyenletes mozgással kihúzni az alsó téglát? (**30N**)

.2) Egy tárgyat 20 m/s sebességgel vagyunk képesek elindítani: vízszintes sík, súrlódásos felületen csúsztatva, avagy a sík felület adott pontjából alkalmas szög alatt elhajítva. Célunk, hogy az indítás helyétől minél nagyobb távolságra jusson a test.

- A hajítás után a test a leesés helyén marad! Melyik módszert érdemes választani a μ súrlódási együttható függvényében? ($\mu < 0,5$ esetén csúsztatjuk)
- (Csak érettségi előtt állóknak!) Legyen most $\mu = 0,2$, és essen az elhajított test a súrlódásos felületre úgy, hogy ütközéskor merőleges sebességkomponensét elveszítve, a felületen tovább csúszhat. Alkalmas szögben hajítani, avagy kezdettől csúsztatni érdemes? (**hajítani**)

.3) Lehet-e a csúszási súrlódási együttható nagyobb a tapadási súrlódási együtthatónál? (**nem**)

.4) Az asztalon M tömegű téglá fekszik, rajta pedig egy m tömegű. A **alsó** téglát vízszintesen F erővel húzzuk. Az asztalon a súrlódási együtthatók: μ_{o1} illetve μ_1 , míg a téglák között μ_{o2} illetve μ_2 . Az F erő nagyságát 0-ról indulva, folyamatosan növeljük (akkor sem csökkentjük, ha közben a téglák mozgása hirtelen megváltozik).

- Vizsgáljuk meg, hogyan függ az F erő értékétől a két téglá mozgása! Ábrázoljuk az F erő függvényében a téglák gyorsulásait.
- Határozzuk meg a téglák gyorsulását az alábbi esetekben:
 - $M=0,5 \text{ kg}$, $m=0,3 \text{ kg}$; $\mu_{o1} = \mu_{o2} = \mu_1 = \mu_2 = 0,2$ esetben az $F = 1N$; $2N$; $4N$ erők mellett.
(0 és 0; 0,5m/s² és 0,5m/s²; 3,6m/s² és 2m/s²)
 - $M=1 \text{ kg}$, $m=2 \text{ kg}$; $\mu_{o1}=0,4$, $\mu_1=0,35$, $\mu_{o2}=0,2$, $\mu_2=0,15$ esetben az $F = 10N$; $15N$, $20N$ erők mellett.
(0 és 0; 1,5m/s² és 1,5m/s²; 4m/s² és 1,5m/s²)
 - $M=1 \text{ kg}$, $m_2=2 \text{ kg}$; $\mu_{o1}=0,6$, $\mu_1=0,35$, $\mu_{o2}=0,2$, $\mu_2=0,15$ esetén az $F = 10N$ ill. $20N$ mellett.
(0 és 0; 6,5m/s² és 1,5m/s²)

.5) Az asztalon M tömegű téglá fekszik, rajta pedig egy m tömegű. A **felső** téglát vízszintesen F erővel húzzuk. Az asztalon a súrlódási együtthatók: μ_{o1} illetve μ_1 , míg a téglák között μ_{o2} illetve μ_2 . Az F erő nagyságát 0-ról indulva, folyamatosan növeljük (akkor sem csökkentjük, ha közben a téglák mozgása hirtelen megváltozik).

- Írjuk le, hogyan mozognak a téglák. Az F erő függvényében ábrázoljuk a téglák gyorsulását.**
- Határozzuk meg a téglák gyorsulását az alábbi esetekben:
 - $m=0,5 \text{ kg}$, $M=0,3 \text{ kg}$, $\mu_{o1} = \mu_1 = 0,1$, $\mu_{o2} = \mu_2 = 0,5$; $F = 0,5N$ illetve $1N$ esetén.
(0 és 0; illetve 0,25 és 0,25 m/s²)
 - $m=1 \text{ kg}$, $M=5 \text{ kg}$, $\mu_{o1} = 0,2$, $\mu_1 = 0,15$, $\mu_{o2} = 0,4$, $\mu_2 = 0,35$; $F = 10N$.
(0 és 6,5 m/s²)
 - $m=3 \text{ kg}$, $M=2 \text{ kg}$, $\mu_{o1} = 0,2$, $\mu_1 = 0,15$, $\mu_{o2} = 0,4$, $\mu_2 = 0,35$; $F = 10N$ avagy $15N$ avagy $20N$.
(0 és 0 avagy 1,5 és 1,5 m/s² avagy 3,17 és 1,5 m/s²)

.6) Egy 80 kg tömegű ember a vízszintessel 60°-os szöget bezáró kötél végét húzva, egy állócsiga segítségével akar felemelni egy terhet. Legfeljebb mekkorát tud felemelni, ha a talpa alatt $\mu_o = 0,2$? (**23,77kg**)

.7) Az asztal és a test között a súrlódási együttható 0,4. Az testet az asztallal 75°-os szöget húzóerővel szeretnénk odébb húzni.

- Mekkora legyen ez az erő? (**0,620 mg**)
- És ha ellentétes irányú nyomóerőt alkalmazunk? (-)
- Mekkora lehet a nyomóerő vízszintessel bezárt szöge ahhoz, hogy a test megcsússzon? (**max. 68,2°**)

.8)

- Teherautó nyugalomból indul, 3 s-ig 4m/s² a gyorsulása, majd az elért sebességgel mozog tovább. Kezdetben egy láda állt a rakfelületén. $\mu = \mu_o = 0,25$. Hol lesz a láda a kocsin az indulástól számított 4,5 s és 6 s múlva?
(**10,69 m, 10,80 m**)
- A 12 m/s sebességű teherautó 4m/s² lassulással fékez. Kezdetben egy láda áll a rakfelületén. $\mu = \mu_o = 0,3$. Legalább milyen hosszú legyen a rakfelület az autón a láda előtt, hogy a láda ne ütközzön neki a rakfelület elejének? Mennyit mozdul el a láda a talajhoz képest a teljes folyamat alatt? (**6 m, 24 m**)

- c) Egy tálcán egy tányér van, $\mu_0=0,4$, $\mu=0,3$. A tálcát kétszer akkora gyorsulással húzzuk, mint amekkora gyorsulásnál a tányér megcsúszna rajta. Mennyit mozdul el a tányér az asztalhoz képest, amíg beleütközik a tálca 50 cm távol lévő peremébe? **(30 cm)**

.9) Mekkora sebességgel haladhat az autó az $R=50$ m sugarú kanyarban a megcsúszás veszélye nélkül, ha...

- a) ... $\mu_0=0,5$ és az úttest vízszintes, **(max. 56,92 km/h)**
 b) ...súrlódás nincs, de az úttest 15° -os szöggel be van döntve, **(pontosan 41,67 km/h)**
 c) ..., $\mu_0=0,2$ és az úttest 15° -os szöggel be van döntve? **(20,44 km/h és 56,60 km/h között)**
 d) Van-e olyan reális súrlódási együttható, ami esetén a 15° -kal megdöntött úton lehetséges legkisebb és legnagyobb sebesség aránya 1:2? **($\mu=0,154$)**

.10) *Egy m tömegű testet súrlódásos asztalon (μ_0) szeretnénk megindítani a lehető legkisebb húzóerővel, de ennek irányát szabadon megválaszthatjuk.

- a) Legalább mekkora erő szükséges, és milyen irányú legyen ez a minimális erő? Számoljunk paraméteresen! (Figyelem! A $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ addíciós tétel ismerete szükséges!)
- b) $\mu_0 = 0,4$ esetén mekkora a húzóerő vízszintessel alkotott szöge és a minimális erő? **($21,8^\circ$; 0,3714 mg)**
- c) Ha a minimális erő $0,5$ mg, akkor mekkora a súrlódási együttható? **($1/\sqrt{3}$)**

.11) Egy nagyméretű, vízszintes síkú, ω szögsebességgel forgó korongon $m = 0,2$ kg tömegű testet $D=20$ N/m rugóállandójú rugóval kapcsolunk a korong középpontjához. A rugó nyújtatlan hossza $r_0 = 0,1$ m. A korongon $\mu_0 = 0,4$ a tapadási súrlódási együttható.

- a) Milyen nagyságú és irányú súrlódási erő hat a testre $\omega = 6/s$ szögsebesség esetén, ha $r=0,2$ m? **[0,56 N]**
- b) A középponttól milyen távolságban lehet nyugalomban a test a koronghoz képest, ha $\omega = 6/s$ **[0,094 m; 0,219 m]**
- c) És ha $\omega = 10/s$? **[nincs ilyen]**
- d) A középponttól milyen távolságban lehet nyugalomban a test a koronghoz képest, ha $D = 6$ N/m és $\omega = 7/s$? **[0 m; 0,053 m]**
- e) Ha nem túl nagy a forgás szögsebessége, azaz $D > m\omega^2$, akkor adjuk meg paraméteresen a legkisebb és legnagyobb lehetséges r távolságot, ahol a test a koronghoz képest nyugalomban lehet.
[$\frac{Dr_0 - \mu_0 mg}{D - m\omega^2}$ és $\frac{Dr_0 + \mu_0 mg}{D - m\omega^2}$ avagy 0 és $\frac{Dr_0 + \mu_0 mg}{D - m\omega^2}$]

.12) Egy nagyméretű, vízszintes síkú, ω szögsebességgel forgó korongon $m = 0,2$ kg tömegű testet D rugóállandójú rugóval kapcsolunk a korong középpontjához. A rugó nyújtatlan hossza $r_0 = 0,1$ m. A korongon $\mu_0 = 0,4$ a tapadási súrlódási együttható. Adott r távolság esetén keressük meg azt a *minimális és maximális szögsebességet*, amelynél a test még nem csúszik meg a korongon!

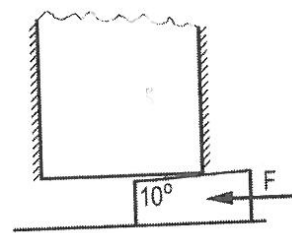
- a) Legyen $D = 1$ N/m, $r = 0,05$ m. **[0/s ; 8,66/s]**
 b) Legyen $D = 1$ N/m, $r = 0,3$ m. **[0/s ; 4,08/s]**
 c) Legyen $D = 20$ N/m, $r = 1$ m. **[29,33/s ; 30,66/s]**
 d) Igen nagy r távolság esetén mekkora lehet a szögsebesség? **[$\sqrt{\frac{D}{m}}$]**

.13) A 0,2 m hosszú fonállal kikötött testet vízszintes felületen körpályára indítjuk 3 m/s kezdősebességgel. A test tömege 0,5 kg, a súrlódási együttható 0,4.

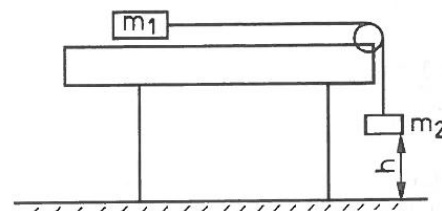
- a) Mekkora szöggel fordul el a fonál az indulástól a megállásig? **(322°)**
 b) Mekkora a fonálerő az indítástól számított 0,6 s múlva? **(0,900 N)**

.14) Egy oszlopot két fal között az ábra szerint 10° -os ékkel emelünk. A súrlódást csak az ék és a talaj között vesszük figyelembe, itt a súrlódási együttható 0,2. Az ék tömegétől tekintünk el.

- a) Az oszlop egyenletes emeléséhez az ékre 1000 N nagyságú, vízszintes erővel kell hatni. Mekkora az oszlop tömege? **(265,7 kg)**
 b) Mekkora a munkavégzésünk hatásfoka az oszlop emelése közben? **(46,85 %)**
 c) Mekkora vízszintes erő szükséges az oszlop egyenletes süllyesztéséhez? **(62,91 N)**
 d) Mekkora legyen a súrlódási együttható, hogy az oszlopot fele akkora ékre ható erővel lehessen süllyeszteni mint emelni? **(0,529 vagy 0,0588)**



.15) Vízszintes asztallapra helyezett $m_1=10$ kg tömegű testhez csigán átvetett fonál végére függesztett $m_2=5$ kg tömegű testet kötünk. Kezdetben az m_1 tömegű test 3 m távolságra áll a csigától, m_2 tömegű test pedig $h=1,2$ m magasan van a talaj felett. Az asztallap és a rajta lévő test között a súrlódási együttható 0,3.



- a) Mekkora sebességgel ér a fonál végén függő test a talajra? **(1,78 m/s)**
- b) A csigától milyen távolságban áll meg az m_1 tömegű test? **(1,27 m)**

.16) Liftben gumikötelet megnyúlás nélkül, vízszintesen rögzítünk, majd nehezéket akasztunk a közepére. Az álló liftben a gumiszál 30° -os, a gyorsuló liftben 35° -os szögben hajlik lefelé a vízszinteshez képest. Milyen a lift gyorsulásvektora és merrefelé megy a lift **(6,37 m/s², sebesség iránya ismeretlen)**

.17) Nagy magasságból levegőben régóta eső golyó tömege 93 g, sugara 10 cm. Esés közben 36 km/h sebességű vízszintes szél fúj. A levegő sűrűsége 1,29 kg/m³, alaktényező 0,225. Mekkora szögben és mekkora sebességgel csapódik a talajhoz a golyó? **(55,00°; 62,77 km/h)**

.18) Két azonos anyagú gömb egyikének sugara duplája a másikénak. Fonallal összekötjük, és nagy magasságból levegőben leejtjük őket. A kisebb golyó tömege m .

- a) Melyik lesz alul esés közben? **(nagy)**
- b) Mekkora erő feszíti a fonalat? **(0,8 mg)**

.19) Egy 8 kg tömegű, üres merev falú gömbhéjba egy másik, 8 kg tömegű tömör gömböt teszünk. A rendszert nagy magasságból levegőben leejtjük. A közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányos, 1 m/s² esetén 0,1 N.

- a) Mekkora az elért legnagyobb sebesség? **(40 m/s)**
- b) Ábrázoljuk a két test közötti nyomóerőt az elért sebesség függvényében. **(a sebességnek másodfokú függvénye, 0-80 N között)**

.20) A Merkúr pályájának fél nagytengelye $57,90 \cdot 10^6$ km, fél kistengelye $56,66 \cdot 10^6$ km, keringési ideje 74,8 nap. Mennyi a Merkúr területi sebessége? Mekkora sebességgel halad a Merkúr napközben és naptávolban? **(1,595 $\cdot 10^9$ km²/s; 69,38 km/s; 45,69 km/s)**

.21) A Halley-üstökös pályájának fél nagytengelye $5700 \cdot 10^6$ km, fél kistengelye $1080 \cdot 10^6$ km, keringési ideje 76,2 év. Mekkora a Halley-üstökös sebessége napközben és naptávolban? **(156 km/s; 1,42 km/s)**

.22) Mennyi idő alatt esne a Föld a Napba illetve a Hold a Földbe, ha hirtelen nullára csökkenne a kerületi sebessége? **(64,6 nap; 4,83 nap)**

.23) A Föld – Nap rendszer minden méretét (a pályasugarakat és az égitestek sugarát) úgy kicsinyítjük le, hogy a pályasugár 1 m legyen, de az égitestek *sűrűségei változatlanok* maradjanak. Mekkora volna ebben a modellben a Föld keringési ideje? **(1 év)**

.24) m_1 és m_2 tömegű csillagok egymástól R távolságban körpályákon keringenek közös súlypontjuk körül. Mennyi a keringési idejük? $\left[2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\gamma(m_1+m_2)}} \right]$

.25) Két, egyenként $5,074 \cdot 10^{30}$ kg tömegű csillag egymástól mért távolsága 8 millió km. Közös tömegközéppontjuk körül körpályán keringenek. Mennyi a csillagok keringési ideje? **(2,00 nap)**

.26) Két galaktika egymástól $2 \cdot 10^6$ fényév távolságban van, mindegyikük tömege $2 \cdot 10^{41}$ kg. Egymás körül nem forognak. Kölcsönös vonzásuk hatására mekkora gyorsulással indulnak el egymás felé és 1 év alatt mekkora utat tesznek meg? ($3,72 \cdot 10^{-14} \frac{m}{s^2}$; **18,5 m**)

.27) Mekkora az átlagos sűrűsége annak a gömb alakú bolygónak, mely a tengelye körül 6 óra alatt fordul meg és amelynek az egyenlítőjén a testek súlyát 10%-kal kevesebbnek mérjük mint a pólusán? (**3029 kg/m³**)

.28) Az R rádiuszú, m_2 tömegű karika középpontjában, síkjára merőlegesen rajzolt egyenesen, a karika középpontjától r távolságban m_1 tömeg van.

a) Mekkora erővel vonzzák egymást? ($\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cos^3 \propto$)

b) *Az m_1 tömeg mely helyzetében a legnagyobb a vonzóerő? ($r = \frac{R}{\sqrt{2}}$; $F_{\max} = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} \frac{2}{3\sqrt{3}}$)

.29) A talajközeli felmelegedést követően felszálló meleg légáramlatokban lévő vízgőz a magasban a lehűlés miatt telítetté válik, és többnyire földi eredetű szennyeződéseknek kicsapódik. A vízcseppek átmérője ekkor kb. 20 mikrométer. Ezek a cseppek a környező levegőhöz képest lefelé kezdenek esni. Ez a sebesség elég kicsi ahhoz, hogy a csepp körüli légáramlás „réteges”nek (lamináris) legyen tekinthető. Ekkor a fellépő közegellenállási erő nagysága csak a sebesség első hatványával arányos: $F_k = 6\pi\eta r v$. (Ahol r a csepp sugara, η pedig a közeg anyagára jellemző, a hőmérséklettől jelentősen függő viszkozitás.)

a) Mekkora sebességgel esik egy 20 cm átmérőjű vízcsepp a környező levegőhöz képest, ha a levegő viszkozitása a felhőben uralkodó 0°C hőmérsékleten $\eta = 1,71 \cdot 10^{-5} Pa \cdot s$, sűrűsége pedig $1,30 \text{ kg/m}^3$? (**1,30 cm/s**)

b) A talaj közelébe érve az esőcsepp (sorozatos egyesülések és a környező levegő páratartalmának rácsapódása miatt) már 0,7 mm átmérőjűvé hízik. Mekkora lesz most a sebessége, ha az áramlás továbbra is réteges marad? (**15,93 m/s**)

c) Méz üvegbe öntéskor 4 mm átmérőjű levegőbuborék került a mézbe, ami a felszín alatt 20 cm mélységben van. Mennyi idő alatt jön fel a méz felszínére? A méz viszkozitása 10 Pas, a sűrűsége 1,4-szerese a víz sűrűségének, a levegő sűrűsége $1,30 \text{ kg/m}^3$. (**10,7 óra**)

d) A méz pergetéskor sokkal kisebb levegőbuborékok is kerülnek a mézbe. Amikor ezek a felszínre jönnek, finom fehérnek látszó hab keletkezik a méz felszínén. Egy ilyen buboréknak a hordóban 1 m mélységből egy hétig tart, amíg a felszínre jut. Mekkora volt az átmérője? (Tekintsünk el a méret változásától a folyamat alatt.) (**0,146 mm**)

.30) Egy gömb alakú homogén bolygóból kibányászunk egy fele akkora sugarú gömb alakú üreget, mely a P pontban érinti az eredeti bolygófelszínt. Az eredeti bolygó felszínén mért gravitációs gyorsulásnak hányad része lesz a gravitációs gyorsulás a bolygó felszínétől R távolságra, illetve a bolygó felszínén ...

a) ...az eredeti középpontból a P ponton átmenő félegyenes mentén? (**19,4%; 50%**)

b) ...ezen félegyenessel ellentétes félegyenes mentén? (**23,0%; 94,4%**)

c) ...ezen félegyenesre merőleges, az eredeti középpontból induló félegyenes mentén? (**22,2%; 91,2%, irányuk nem az eredeti középpont felé mutatnak!**)

Béla szerint az előző kérdésekre csak hosszadalmas számolások után lehetett válaszolni. Helyette egyszerűbbet javasol: Az eredeti bolygóból megmaradó 7/8 tömegű részt gondolatban ponttá zsugorítjuk a megmaradó rész tömegközéppontjába. Innentől a megmaradó rész gravitációs vonzóereje könnyen számolható bármely pontban.

d) Számoljuk ki ilyen megfontolásokkal a P pontbeli gravitációs gyorsulást és vessük össze a fent számolt értékkel. (**76,2%, nem egyezik**)

e) Hol a hiba Béla gondolatmenetében? (?)

.31) A Föld sugara R , a Holdé $0,27R$, középpontjaik távolsága $60R$. A Föld tömege a Holdénak 81-szerese.

a) Melyik égitest átlagsűrűsége nagyobb? (**a Földé 1,59-szer**)

b) A Föld-Hold egyenesen hol van az a pont, ahol a két égitest ugyanakkora erővel vonzza az űrhajót? (**54R távol a Föld középpontjától**)

c) Hol van a két égitest rendszerének tömegközéppontja? (**A Föld felszíne alatt, a középponttól 0,732R távolságra**)

.32) Számítsuk ki a Föld tömegét és átlagsűrűségét az $R = 6307$ km sugár és a felszínen mért $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ gravitációs gyorsulás értékéből. (**$5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; 5510 kg/m^3**)