

3-Lendület

.1) A 4 m hosszú, a vízhez képest álló csónak egyik végéből a másik végébe átmegy egy 80 kg -os ember. A csónak 240 kg tömegű.

- a) Áthaladás után mennyit mozdult el a csónak és az ember a vízhez képest? **(1m; 3m)**
- b) Függ-e a fenti kérdésre adott válasz attól, hogy az ember egyenletes, avagy változó mozgással haladt? **(nem)**

.2) Egy kocsi és a rajta utazó ember összesen $M = 90\text{ kg}$ tömegűek, sebességük $v = 10\text{ m/s}$. Az ember magával visz két, egyenként $m = 9\text{ kg}$ tömegű téglát is. Az ember a téglákat a kocsihoz (a kocsi kidobást követő sebességéhez) képest $u = 20\text{ m/s}$ sebességgel fogja kidobni. Mekkora lesz a kocsi sebessége a téglák kidobása után, ha...

- c) ...egyszerre dobja ki mindkét téglát, az egyiket előre, a másikat hátra. **(10 m/s)**
- d) ...először egyiket előre, majd a másikat hátra dobja. **(10,15 m/s)**
- e) ...először egyiket hátra, majd a másikat előre dobja? **(9,85 m/s)**
- f) Mekkora legyen az M/m tömegarány, hogy a téglákat megfelelő sorrendbe kidobva, a sebességnövekedés $0,05u$ legyen? **(3)**

.3) Egy M tömegű kocsiból, mely kezdetben állt, egy kilövőszerkezet minden másodpercben m tömeget dob hátrafelé, a kocsihoz (annak kidobás utáni sebességéhez) képest u sebességgel. Legyen $M = 12m$. A talajon nincs súrlódás.

- a) Hányadiknak kidobott tömeg lesz az, mely megközelítőleg függőlegesen fog a talajra esni? **(8.)**
- b) Mekkora lesz a kocsi sebessége ekkor pontosan? **(1,02u)**
- c) A kidobálás addig folytatódik, amíg a kocsi végül csak m tömegű marad. Mekkora lesz ekkor a sebessége? **(2,10u)**
- d) *Vajon a kezdeti M/m arány növelésével bármilyen nagy sebességre fel tudna gyorsulni a kocsi? **(igen)**

.4) 20 m magas oszlopon $0,5\text{ kg}$ tömegű golyó áll. Ezt vízszintesen átlövi egy 25 g -os kis lövedék. A golyó az oszlop aljától 3 m -re, a lövedék 16 m -re esett le. Mekkora volt a lövedék sebessége? Számoljunk $g = 10\text{ m/s}^2$ -tel. **(38,0 m/s)**

.5) 20 kg tömegű, 10 m/s sebességű kiskocsira, 30° -os lejtőről, szemből 5 m/s sebességű, 10 kg tömegű láda csúszik rá, és rajta is marad. Súrlódás csak a kocsi és a láda között van.

- a) Mekkora lesz a közös sebességük? **(5,22 m/s)**
- b) A csúszás alatt a gyorsulások nem voltak állandóak. A csúszás $0,2\text{ s}$ ideig tartott, miközben a láda a kocsin 3 m -t csúszott hátrafelé. Mekkora a testek elmozdulása a csúszás időtartama alatt a földhöz képest? **(2,05 m; 0,95 m)**

.6) Az m tömegű ember v sebességgel halad (fut, csúszik) súrlódásmentes jégen, majd felugrik egy előtte álló M tömegű hosszú kocsi hátuljára. Amikor a rajta való utazást megunta, a kocsi elejére sétál, és onnan előre rugaszkodva leugrik úgy, hogy a jéghez képest a sebessége ismét v lesz. A jégen semmiféle súrlódás nincs. Mekkora most a kocsi sebessége? **(0)**

Ütközések

.7)

- a) Mutassuk meg, hogy *bármely két test* ütközésének folyamatában, tetszőlegesen kiválasztva annak két szakaszát, az egyes testek e két szakaszban nyert *sebességváltozás-vektorai nagyságának* arányai mindkét testre ugyanazok.
- b) Két test *centrális* ütközésénél nevezzük az ütközés *első szakaszának* azt, amíg a testek relatív sebessége 0 -vá válik, *második szakaszának* pedig azt, ami ezután történik. A testek sebességvektorai így (a centrális egyik irányát pozitívnak választva) előjeles számokkal adhatók meg. Mutassuk meg, hogy az ütközés második és első szakaszában szerzett *sebességváltozás-vektorok (mint előjeles számok) hányadosa ugyanaz a pozitív szám mindkét testre*.

Definíció: Két test centrális ütközésekor **ütközési számnak** nevezzük azt a k számot, ami megmutatja, hogy az ütközés *első szakaszában elszenvedett sebességváltozásnak hányszorosát nyeri még a test az ütközés második szakaszában*. A két ütközési szakaszt az a pillanat választja el, amikor a testek sebessége azonos.

Röviden: $k = \Delta v_{2.szak} / \Delta v_{1.szak}$.

A $k=0$ eset neve: *tökéletesen rugalmatlan* ütközés, a $k=1$ eset neve *tökéletesen rugalmas* ütközés.

.8) Mutassuk meg, hogy két test centrális ütközésekor az ütközési szám ellentettje megadja a testek *ütközés utáni és előtti relatív sebességnek arányát* is, azaz $k = -v_{rel.}^{utána} / v_{rel.}^{előtte}$.

Definíció: Egy test mozgási energiáján értjük a $E_{mozg} = \frac{1}{2}mv^2$ mennyiséget. (Mértékegységének neve joule: J)

.9)

- a) Mutassuk meg, hogy két test *centrális ütközésekor*, ha az ütközési szám $k=1$, akkor az ütközés során megmarad a rendszer tagjaira számolt $\frac{1}{2}m_i v_i^2$ mozgási energiák összege.
- b) Mutassuk meg, hogy két test *centrális ütközésekor*, amennyiben a rendszer tagjaira számolt $\frac{1}{2}m_i v_i^2$ mozgási energiák összege megmarad, akkor az ütközési szám $k=1$.

Látható, hogy *centrális ütközések esetén egyenértékű az, hogy az ütközési szám 1, illetve az, hogy a mozgási energia megmarad*. Mivel a mozgási energia megmaradásának nem csak centrális ütközés esetén van értelme, ezért az alábbi definíciót használjuk (ami centrális ütközések esetén a korábbi definícióval egyenértékű):

Definíció: Két test ütközése *rugalmas*, ha a mozgási energiák összege az ütközésben nem változik.

.10) Tökéletesen rugalmasan, centrálisan ütközik két szemben haladó test: Egyik 3 kg-os és 8 m/s sebességű, a másik 5 kg, 4 m/s.

- a) Mekkora lesz az ütközés utáni sebességek? **(7m/s, 5m/s ellentétesen)**
- b) Megmarad-e a mozgási energia? **(igen)**

Oldjuk meg a feladatot ütközésszám használatával is és lendületmegmaradás és mozgási energiamegmaradás együttes használatával is! Ez utóbbi esetben a másodfokú egyenletrendszerből ki kell jönnie az eredeti, ütközés előtti állapotnak is, ami megerősít minket abban, hogy nem vétettünk számolási hibát!

.11) Egy 20 kg-os, 8 m/s sebességű test utolér egy 12 kg-os, 5 m/s sebességűt, és tökéletesen rugalmasan ütköznek.

- a) Mekkora lesz az ütközés utáni sebességek? **(5,75m/s; 8,75m/s)**
- b) Megmarad-e a mozgási energia? **(igen)**

Oldjuk meg a feladatot ütközésszám használatával is és lendületmegmaradás és mozgási energiamegmaradás együttes használatával is!

.12) Azonos tömegű testek tökéletesen rugalmasan, centrálisan ütköznek. Mekkora az új sebességek? **(sebességcserre történik)**

.13) Az m tömegű, v sebességű test rugalmasan, centrálisan ütközik M tömegű, V sebességű testtel.

- a) Mekkora az új sebességek? $\left(v' = \frac{(m-M)v + 2MV}{M+m}; \quad V' = \frac{2mv + (M-m)V}{M+m}\right)$
- b) Mi történik, ha M sokkal nagyobb m -nél és a nagy test eredetileg állt? **(a kis test ellentétes sebességgel visszapattan)**
- c) Mekkora a sebességek és hogyan változik meg a kicsi test nagyhoz viszonyított relatív sebessége, ha a nagy test tömegéhez képest elhanyagolható a kicsi tömege? **($v'=2V-v$; $V'=V$) (a relatív sebesség ellentétes lesz)**

.14) A 2 m magasról leejtett labda 1,6 m magasra pattan. ($g=9,81 \text{ m/s}^2$)

- a) Mekkora az ütközési szám? **(0,894)**
- b) Mekkora lesz a 3. felpattanási magasság? **(1,02 m)**
- c) Lesz-e utolsó felpattanás, illetve mennyi ideig fog pattogni? **(nem, 11,46 s)**

.15) Egy leejtés után pattogó labda 4. és 7. felpattanásai magasságainak aránya 3:1.

- a) Mekkora az ütközési szám? **(0,833)**
- b) A mozgási energia hányad része tűnik el egy ütközéskor? **(30,7%)**
- c) Összesen mennyi ideig fog pattogni és összesen mekkora utat tesz meg ezalatt? **(10,29 s; 23,90 m)**

.16) Egy labdát 3 m magasról leejtve, az összesen 8 s-ig pattogott. *Mekkora az ütközési szám? **(0,822)**

.17) Egy kis test pillanatszerűen ütközik *súrlódásmentes* falnak, sebessége az ütközés előtt $\alpha=60^\circ$ -os, utána pedig $\beta=30^\circ$ -os szöget zár be a fallal.

- a) Mekkora az ütközési szám? **(1/3)**
- b) Milyen kapcsolat van a fallal bezárt α és β szögek, és az ütközési szám között általában? **($\tan\beta = k \cdot \tan\alpha$)**

.18) Egy kis test *súrlódásos* falnak ütközik tökéletesen *rugalmasan*, a súrlódási együttható $\mu=0,2$. A test sebessége az ütközés előtt 60° -os szöget zár be a fallal.

- a) Mekkora lesz az ütközés utáni sebesség iránya? **($79,9^\circ$)**
- b) Milyen kapcsolat van a fallal bezárt α és β szögek, és a súrlódási együttható között általában? **($\tan\beta = \tan\alpha - 2\mu$)**
- c) Milyen összefüggés áll fenn a két szög, a súrlódási együttható és az ütközési szám között, ha az ütközés nem tökéletesen rugalmas? **[$\tan\alpha - k \cdot \tan\beta = (1+k)\mu$]**

.19) Súrlódásmentes asztalon meglökött érme ugyanolyan, álló érmének ütközik, pillanatszerűen, tökéletesen rugalmasan, de nem centrálisan. A mozgó érme 5 m/s nagyságú sebességvektora az ütközés pillanatában 30° -os szöget zár be a középpontokat összekötő egyenessel. Az érmék érintkező peremén sincs súrlódás.

- a) Mekkora az ütközés utáni sebességek? **(4,33 m/s, 2,50 m/s)**
- b) Mekkora lesz a két érme pályájának szöge? **(90°)**
- c) Mekkora lesz a két érme pályájának szöge, ha kezdetben a v_0 sebesség más irányú volt? **(90°)**

.20) Súrlódásmentes asztalon meglökött érme fele akkora tömegű álló érmének ütközik ferdén, tökéletesen rugalmasan, pillanatszerűen. Az érmék érintkező peremén sincs súrlódás. A mozgó érme sebességvektora az ütközés pillanatában 30° -os szöget zár be a középpontokat összekötő egyenessel.

- a) Milyenek az ütközés utáni sebességvektorok, ha a mozgó érme sebessége v_0 volt? **($0,577v_0$; $1,154v_0$)**
- b) Mekkora lesz a két érme pályájának szöge? **(60°)**
- c) Mekkora legyen az érkező érmének a centrálissal bezárt szöge, hogy az ütközés utáni sebességek szöge 70° legyen? **($42,48^\circ$)**

.21) Súrlódásos asztalon álló érmének ütközik ferdén, rugalmasan egy másik, ugyanolyan érme. A pillanatszerű ütközés után az eredetileg mozgó érme 8 cm-t, a másik érme 4 cm-t csúszott. (A lassulásuk ugyanaz!) A két érme között érintkezéskor nincs súrlódás.

- a) Mennyit csúszott volna még a mozgó érme, ha nem ütközött volna az álló érmének? **(12 cm)**
- b) Mekkora az ütközés utáni sebességek szöge? **(90°)**
- c) Mekkora a kezdősebesség és a centrális szöge? **($54,74^\circ$)**

.22) Ferde ütközés $\phi=30^\circ$ alatt, súrlódásmentes asztalon, pillanatszerűen, azonos méretű érmekkel. Az érmék között súrlódás nincs, kezdetben egyikük állt. Az ütközési szám 0,8.

- a) Mekkora az ütközés utáni sebességük szöge? **($80,17^\circ$)**
- b) Milyen kapcsolat van k ütközési szám esetén az ütközés előtti ϕ és az ütközés utáni ω szög (érkező érme és a centrális szög) között? **($\tan\omega = 2/(1-k) \cdot \tan\phi$)**

.23) Két rugalmas labda függőlegesen egymásra van helyezve. A felső m_1 tömege legfeljebb akkora mint az alsó m_2 tömege ($\lambda = \frac{m_1}{m_2} \leq 1$). A két labdát ebben a helyzetben elejtjük. A talajra v_0 sebességgel érkeznek. Minden ütközés (testek, talaj között) pillanatszerű, centrális és rugalmas.

- a) Számoljuk ki a labdák sebességeit, amivel a talajtól elpattannak, és mutassuk ki, hogy a felső labda csak egyszer ütközik az alsóval. **[Az első egymással való ütközés után a sebességek (felfelé):
a felsőé $(3-\lambda)/(1+\lambda)v_0$; az alsóé $(1-3\lambda)/(1+\lambda)v_0$]**
- b) Mi történne $m_1=m_2$ esetén, illetve $m_1 < m_2$ esetén? **(visszafelé együtt haladnának, illetve az alsó visszapattan v_0 , a felső $3v_0$ sebességgel.)**
- c) Mekkora legyen a tömegarány, hogy az alsó nyugalomban maradjon a talajon? **($\lambda=1/3$)**
- d) Az eredeti ejtési magasságnak legfeljebb hányszorosára pattanhat fel a felső kicsi labda? Milyen tömegarány esetén közelíti meg ezt a magasságot? **($9h_0$; $\lambda=0$)**
- e) Az előző kérdésre egy furfangos gondolatmenetet javasolt egy diák: *Ha az alsó labda a talajon marad, akkor a kicsi labda viszi el a folyamatban megmaradó mozgási energia egészét. A felső labda azonban annál magasabbra megy, minél több a mozgási energiája. Így a kis labda akkor megy a legmagasabbra, ha a nagy labda a talajon marad, tehát $\lambda=1/3$ esetén. Ez ellentmondani látszik a d) pont eredményének.* Mi benne a hiba? **(?)**

- f) MÉRJÜK meg a labdák tömegeit. Mekkora magasságba kellene a kicsi labdának felpattannia, ha tökéletesen rugalmasak lennének az ütközések? Végezzük el a kísérletet, mérve a kis labda felpattanását!

.24) A faltól L távolságra áll az M tömeg, a fal felől érkezik az m tömeg, ami előbb M -mel, majd a fallal ütközik. Súrlódás nincs, az ütközések rugalmasak. A testek kiterjedése elhanyagolható.

- a) Mekkora M/m tömegarány esetén fog másodszor is ütközni az m és M tömeg? ($M/m > 3$)
b) A faltól milyen távol lesz a második ütközés, ha $m=0,2$ kg, $M=0,8$ kg, $L=3$ méter? (15 m)

.25) Az m tömegű $L = 10$ cm hosszú kiskocsi benne van egy H belső hosszúságú, M tömegű, asztalon álló nagy kocsi, melynek mindkét fala rugalmas. Súrlódás sehol sincs, az ütközések rugalmasak. A rendszer teljes tömege 2 kg. A rendszer nyugalmi helyzetében a nagy kocsit 20 cm/s sebességgel hirtelen lökessel mozgásba hozzuk. Kis idő múlva a nagy kocsi sebessége 12 cm/s-re csökken, majd 2s múlva újra megnő.

- a) Mekkora a kicsi kocsi tömege? (0,40 kg)
b) Mekkora a nagy kocsi belső H hosszúsága? (50 cm)

.26) Az űrben egymástól 20 m távolságra „lebeg” egy 1000 kg-os űrhajó és egy 100 kg-os műhold. Az űrhajó mellett lévő 100 kg-os űrhajós elrugaszkodik az űrhajótól 11 m/s relatív sebességgel a műhold felé, hogy annak antennáját megigazítsa. Ott 13 s ideig dolgozik, majd visszafelé, az űrhajó irányába rugaszkodik el.

- a) Legalább mekkora relatív sebességgel rugaszkodjon el a műholdtól, hogy visszajusson az űrhajóhoz? (12m/s)
b) Mekkora legyen az elrugaszkodáskor a műholdhoz képesti relatív sebesség, hogy 10 s alatt jusson vissza az űrhajóhoz? (32m/s)
c) Melyik elrugaszkodásakor esetén kellet „erősebben” ellöknie magát, ha az ellökési folyamatok ideje azonos volt? (2.)
d) Mikor végzett nagyobb munkát? (2.)

.27) Egy 30° -os hajlásszögű, $M=3$ kg tömegű, vízszintes síkon álló, nem rögzített lejtőre 2 m magasságból $m=1$ kg tömegű labdát ejtünk. Súrlódás nincs. A lejtő alja nem rugalmas.

- a) Mekkora a testek sebessége a teljesen rugalmas ütközés után? (4,14 m/s, 1,36 m/s)
b) Mekkora lennének a sebességek, ha a labda a lejtő anyagával azonos anyagú vízszintes asztalra 2 m magasról ejtve, csak 1,5 m magasra pattanna vissza? (3,81 m/s, 1,27 m/s)

.28) Egy α hajlásszögű rögzített, hosszú lejtőre teljesen rugalmasan ütköző kislabdát dobunk merőlegesen, mely a lejtőn „lefelé” kezd pattogni. A lejtővel való első két érintkezési pont távolsága d . Mekkora lesz az 5. és 6. érintkezési pont távolsága? (9d)

.29) Függőlegesen, 40 m/s sebességgel fellőtt 3 kg-os lövedék a fellövés után 2 s-mal felrobban. Az egyik, 1 kg-os darab a robbanás után 1 s-mal esett le, 20 m távol a fellövés helyétől. Mikor és hol esett le a másik darab? (A nehézségi gyorsulás értéke legyen $g=9,81$ m/s²!) (12,85 s; 128,5 m)

.30) Az atomreaktorban a maghasadáskor keletkező gyors neutronokat mielőbb le kell lassítani, ezért valamely anyag álló atommagjaival ütköztetik őket többször, egymásután. *Tételezzük fel, hogy a lassító anyag atomjai között nincs kölcsönhatás, még akkor sem, ha ugyanazon molekula tagjai!*

- a) Melyik anyag a legalkalmasabb erre a feladatra, ha a környezetben található anyagok közül lehet választani, és célszerű figyelembe venni azok beszerzési árát is? Vizsgáljunk centrális ütközéseket! (**M legyen minimális!**)
b) Hány ütközésre lenne szükség, a neutron 1/100-ad részére akarjuk lassítani, és hidrogéngáz, avagy héliumgáz, avagy szén, avagy oxigén lenne a lassító? (1, 9, 28, 37)

.31) *

- a) Hogyan változik egy pontrendszer összlendülete, ha K_1 rendszerről K_2 rendszerre térünk át?
b) Igaz lesz-e a K_2 rendszerben a lendület-megmaradás tétele, ha K_1 -ben igaz volt (pl. egy ütközési folyamatban)? (vö: Galilei-elv) (**igen**)
c) Tekintsük a fiktív, $\mathbf{r}_o = \Sigma(m_i \mathbf{r}_i) / \Sigma m_i$ helyvektorú *tömegközéppontot*. Hogyan határozható meg helye a gyakorlatban?
d) Mutassuk meg, hogy a tömegközéppont - ha ide összesűrítve képzeljük el a rendszer össztömegét- a lendületével a rendszer összlendületét hordozza, bármilyen rendszerből nézve.
e) Mekkora a pontrendszer lendülete a tömegközéppontból nézve? (**0**)
f) Hogyan mozog zárt rendszer tömegközéppontja? Keressünk erre példákat a megoldott feladatok között! (**állandó sebességgel**)