1992

1. feladat

Jelölje m_a, m_b, m_c egy háromszög magasságait, ρ a háromszög beírt körének a sugarát. Igazoljuk, hogy

$$m_a + m_b + m_c \geq 9\rho$$

Mikor áll fenn az egyenlőség?

2. feladat

Osszuk fel egy tetszőleges ABCD konvex négyszög AB, illetve DC szemközti oldalait a P_1, P_2, illetve Q_1, Q_2 pontokkal 3-3 egyenlő részre, majd a megfelelő osztópontok összekötésével bontsuk fel a négyszöget 3 négyszögre. Igazoljuk, hogy a $P_1P_2Q_2Q_1$ négyszög területe megegyezik a AP_1Q_1D és a P_2BCQ_2 négyszögek területének a számtani közepével.

3. feladat

Adott a síkon tetszőlegesen választott 500 pont úgy, hogy semelyik 3 sincs egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindig megadható 100 darab, páronként páronként közös ponttal nem rendelkező olyan konvex négyszög, melynek csúcsai az adott pontok közül valók.

4. feladat

Bizonyítsuk be, hogy semely egész együtthatós P(x) polinomhoz nem találhatók x_1, x_2, ... x_n ($n\geq 3$) különböző egész számok, melyekre:

$$P(x_1) = x_2, \quad P(x_2) = x_3, \quad \ldots, \quad P(x_{n-1}) = x_n \quad P(x_n) = x_1$$

1993

1. feladat

Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$(x^2 - 1993^2)^2 - 7972x - 1 = 0$$

2. feladat

Rögzítsünk a térben egy derékszögű koordináta-rendszert. A tér azon pontjait, melyeknek erre a rendszerre vonatkoztatott koordinátái egészek, rácspontoknak nevezzük.

Legyen K egy olyan n egység élhosszúságú kocka, melynek csúcspontjai rácspontok, élei pedig párhuzamosak a koordináta-rendszer tengelyeivel.

a) Hány olyan különböző téglatest van, melynek csúcsai K belsejében vagy a határán elhelyezkedő rácspontok közül valók, élei pedig párhuzamosak a kocka éleivel? (Két téglatest különböző, ha csúcsaik nem esnek egybe.)
b) Hány kocka van az a) pont feltételeit kielégítő téglatestek között?

3. feladat

Egy háromszög egyik oldala sem nagyobb $2\sqrt{3}$-nál. Igazoljuk, hogy ekkor a háromszög lefedhető 3 darab egységnyi sugarú körrel.

1994

1. feladat

Müller úrnak 1001 német márkája, fiának 1 márkája van. Mindkét fél a meglévő pénzének 1/4-ét átadja a másiknak. Utána többször megismétlik ezt. Hányszor kell az eljárást megismételniük, hogy a vagyonuk különbsége 1 pfennignél kisebb legyen?
(1 DM=100 pfennig)

2. feladat

Tekintsünk egy olyan térképet, amelyen minden két bejelölt városnak a távolsága különböző. Bizonyítsa be, ha minden várost összekötjük a hozzá legközelebb eső várossal, akkor nincs olyan város, amelyből ötnél több összekötővonal indul ki.

3. feladat

Az R sugarú körbe írható háromszögek közül mely esetben lesz az oldalak négyzetének összege maximális?

1995

1. feladat

Bizonyítsa be, hogy az $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xy = 0$ egyenletnek nincs 0-tól különböző megoldása az egész számok halmazán!

2. feladat

Igazolja, hogy az ABC háromszög tetszőleges belső O pontjára fennáll

$$OA \cdot \cos\frac{BAC}{2} + OB \cdot \cos\frac{ACB}{2} + OC\cos\frac{ACB}{2} \geq s$$

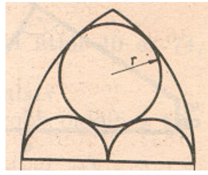
ahol s az ABC háromszög félkerületét jelenti.

3. feladat

Egy négyzetrácson kijelölünk öt rácspontot és azokat páronként összekötjük. Bizonyítandó, hogy a kapott szakaszok valamelyike további rácspontot is tartalmaz. Van-e térbeli analogonja a feladatnak? Állítását indokolja!

1996

1. feladat



Határozza meg az ábrán látható gótikus ablak "középső", négy körívet érintő körének r-rel jelölt sugarát, ha a BC illetve az AB körív középpontja rendre A és B, és sugaruk egységnyi!

2. feladat

Határozza meg az $\dfrac{1}{3^{2x} - 2\cdot 3^{x-1} + 1}$ kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét, ha $x \in [-2; 0]$

3. feladat

Egy n megfigyelőállomással rendelkező sarkkutató expedíció állomásai között legfeljebb k olyan van, amelyek között semelyik kettő nincs egymással közvetlen telefonkapcsolatban. Nincs közöttük továbbá három olyan, amelyek mindegyike közvetlen telefonösszeköttetésben van. Bizonyítsa be, hogy ekkor a közvetlen telefonösszeköttetések száma nem lehet $\dfrac{nk}{2}$-nél nagyobb! Éles-e ez a korlát?

4. feladat

Egy konvex hatszög minden második csúcsánál 120^{o}-os szög van, és egy-egy 120^{o}-os szöget közrefogó oldalpár egyenlő hosszú oldalakból áll. Mit lehet mondani a három 120^{o}-os szögcsúcs által meghatározott háromszögről?

1997

1. feladat

Igazoljuk, hogy ha n az 1-nél nagyobb természetes szám, akkor

$$\frac{27}{48} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < 1$$

2. feladat

Tekintsük az $A_1B_1C_1$ és a hozzá hasonló, kétszer akkora oldalakkal rendelkező, ellenkező körüljárású, tetszőleges $A_2B_2C_2$ háromszögeket. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 szakaszok A_1, B_1, C_1-hez közelebbi harmadoló pontjai egy egyenesen helyezkednek el.

3. feladat

Oldjuk meg a következő egyenletet, ha x és y természetes szám:

$$1 + \frac{1}{x-1996} + \frac{1}{y-1996} = \frac{1995}{(x-1996)(y-1996)}$$

4. feladat

Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges tetraéder felszíne legfeljebb az oldalélei négyzetösszegének $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$-szorosával lehet egyenlő! Mikor áll fenn az egyenlőség?

1998

1. feladat
Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldala fölé a háromszöggel nem azonos félsíkban rajzoljuk meg az ABDE négyzetet. Jelöljük P-vel a DE szakasz felezőpontját! Szerkesszünk P-n keresztül olyan egyenest, amely felezi az ACBDE ötszög területét!

2. feladat
Egy egyenes út mentén valamely pontból kiindulva egymástól 10 m-es távolságra pontosan 10 m magas fákat ültettek. András, Béla, Csaba és Dani egy-egy fa tövéből megmérte a legelső fa látószögét. Miután mérési eredményeiket egyeztették, András csodálkozva felkiáltott: „Jé, a Csaba és Dani által mért szögek összege pontosan megegyezik a Béla által mért szöggel, míg a Béla és Csaba által mért szögek összege pontosan megegyezik az általam mért szöggel!" Hányadik fa tövében mért Béla, Csaba és Dani, ha András a nyolcadik fa tövében végezte a mérést, és Dani mért legtávolabb az első fától?

3. feladat
Egy 2x10-es sakktáblát 2x1-es dominókkal akarunk egyrétűen és hézagmentesen lefedni. Mindegyik dominólappal két szomszédos mezőt takarunk le. Határozzuk meg a lehetséges különböző lefedések számát, ha:

a) a sakktábla helyzete rögzített
b) a sakktábla mozgatható, azaz a sakktábla mozgatásával egymásba vihető fedések nem különbözők!

1999

1. feladat
Az ABC háromszög C csúcsánál levő szöge 135°. Jelöljük A-ból a BC oldalegyenesre, illetve B-ből az AC oldalegyenesre bocsátott merőleges szakasz talppontját A_1-gyel, illetve B_1-gyel! Bizonyítsuk be, hogy az A_1B_1 szakasz hossza egyenlő az ABC háromszög csúcspontjain áthaladó kör sugarával.

2. feladat
Nevezzük az $\frac{1}{n}$ alakú törteket (n pozitív egész) törzstörteknek. Bizonyítsuk be, hogy bármely 0 és 1 közé eső racionális szám felírható véges sok különböző törzstört összegeként!

3. feladat
Hat kör úgy helyezkedik el a síkon, hogy egyik sem tartalmazza más kör középpontját. Bizonyítsuk be, hogy ekkor nem lehet a síknak olyan pontja, melyet mind a hat kör tartalmazna!

4. feladat
Egy sorozatról tudjuk, hogy $a_1=1$ és $n \geq 2$ esetén $a_n = 2a_{n-1} + \sqrt{3a_{n-1}^2 + 1}$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat elemei egész számok!

2000

1. feladat
Jelöljük az ABCD paralelogramma B csúcsán áthaladó AD-re merőleges, valamint a D csúcsán áthaladó AB-re merőleges egyenesek metszéspontját M-mel. Igazoljuk hogy MC $\geq$ BD!

2. feladat
Egy sorozat elemeire teljesül, hogy $a_1 = 2$, és $n \geq 2$ esetén, $a_n = 3a_{n-1} + 2n - 3$. Határozzuk meg a sorozat első n elemének összegét n függvényeként!

3. feladat
Az a valós paraméter milyen értékeire lesz az $x^2 - 2ax + 7a = 0$ egyenletnek két különböző egész gyöke?

4. feladat
Adott a síkon 2n db pont úgy, hogy semelyik három sem illeszkedik egy egyenesre. A pontok közül tetszőlegesen válasszunk ki n-et és színezzük ezeket pirosra, a többit kékre! Bizonyítsuk be, hogy bármely színezés esetén megadható a síkon olyan egyenes, melynek mindkét oldalán van adott pont, és mindkét oldalára teljesül, hogy a piros és kék pontok száma megegyezik!

2001

1. feladat
András és Béla egy-egy pozitív egész számra gondoltak. Megmondták Csabának, aki elárulta, hogy a gondolt számok különbsége 2001. Ebből András még nem tudta, hogy melyik számra gondolt Béla. Ezután Béla is azt mondta, hogy ő se tudja, hogy melyik számra gondolt András. De ekkor András már tudta, hogy melyik számra gondolt Béla, de ha 1-gyel nagyobb számra gondolnak, már nem tudta volna. Melyik számra gondolt András és Béla?

2. feladat
Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben OM < 3R, ahol M a háromszög magasságpontja, O a köré írt kör középpontja, R pedig a köré írt kör sugara!

3. feladat
Bizonyítsuk be, hogy az olyan nyolcszög, amelynek szögei egyenlők és az oldalainak mérőszámai pedig racionális számok, szükségképpen középpontosan szimmetrikus!

4. feladat
Mutassuk meg, hogy a

$$9kx^2(x-1) + t(9x-1) = 0$$

egyenlet gyökei ($k \neq 0$, k és t valós számok) nem lehetnek egymástól páronként különböző pozitív valós számok!