Matematika versenyfeladatok

Zalaegerszeg, 2025. október 17.

1. Legyen $ABCDE$ egy olyan konvex ötszög, amelynek minden oldala egyenlő, valamint C-nél és D-nél levő szöge derékszög. Jelölje P az AC és BD átlók metszéspontját. Igazoljuk, hogy a PA és PD szakaszok egyenlő hosszúak!

(25 pont)

2. Legyen $x \neq -1, y \neq -1$ olyan valós számok, melyekre $xy = 1$. Igazoljuk, hogy ekkor teljesül a

$$\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{2+y}{1+y}\right)^2 \geq \frac{9}{2}$$

egyenlőtlenség! Egyenlőség milyen esetekben áll fenn? A válaszát indokolja!

(25 pont)

3. Legyen S a valós számok egy olyan részhalmaza, mely zárt a szorzásra, azaz bármely két, nem feltétlenül különböző S-beli szám szorzata szintén S eleme. Az S halmazt felbontottuk az A és B diszjunkt halmazokra úgy, hogy bármely, nem feltétlenül különböző három A-beli szám szorzata A-beli, és bármely három, nem feltétlenül különböző B-beli szám szorzata B-beli. Igazoljuk, hogy A és B legalább egyike zárt a szorzásra!

(25 pont)

4. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+$ egész számok halmazán értelmezett és a pozitív egész számok halmazába képező függvényt, amelyre

$$f(n-1) + f(n+1) \leq 2f(n)$$

teljesül minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén!

(25 pont)