

MATEMATIKA VERSENYFELADATOK

Zalaegerszeg, 2023. október 20.

1. Legyenek x_0, x_1, \dots, x_{n-1} valós számok, ahol $n \geq 2$. Legyen tetszőleges i egészre $x_{i+n} = x_i$. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i (3x_i - 4x_{i+1} + x_{i+2}) \geq 0.$$

(25 pont)

2. Legyen ABC egy háromszög a síkon. Legyen D és E rendre a háromszög AB és AC oldalának egy-egy belső pontja. Legyen $|AD| = 1$, $|DB| = 2$, $|BC| = 4$, $|CE| = 2$ és $|EA| = 3$. Jelölje F a BC és DE szakaszokat tartalmazó egyenesek metszéspontját. Mennyi $|CF|$, azaz a CF szakasz hossza?

(25 pont)

3. Minden n pozitív egészre jelölje $d(n)$ n pozitív osztóinak számát, azaz pl. $d(1) = 1$, $d(2) = 2$ és $d(4) = 3$. Határozzuk meg az összes n pozitív egészt, melyekre teljesül a

$$d(n) + d(n+1) = 5$$

egyenlőség.

(25 pont)

4. Keressük meg az összes x, y valós számot, melyek kielégítik az

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2 \\ \frac{x^2}{2-y} + \frac{y^2}{2-x} &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszeret.

(25 pont)