

MATEMATIKA VERSENYFELADATOK

Zalaegerszeg, 2023. március 17.

1. Számoljuk ki azon pozitív egészekből álló $(m; n)$ rendezett párok számát, melyek kielégítik az $m \leq n^2$ és az $m + n \leq 53$ egyenlőtlenségeket!

(25 pont)

2. Legyen $ABCD$ egy négyzet, és legyen H az AB oldal egy belső pontja, melyre $|AB| \cdot |BH| = |AH|^2$. Legyenek X és E rendre az AH szakasz és az AD oldal felezőpontjai, és legyen Y az EB szakasz azon pontja, melyre XY merőleges EB -re. Igazoljuk, hogy $|XY| = |XH|$!

(25 pont)

3. Legyenek a_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$ nemnegatív egészek egy $(n \times n)$ -es táblázat elemei, ahol a_{ij} jelöli az i -edik sor j -edik oszlopában álló elemet. Tudjuk, hogy minden a_{ij} elemre, ha $a_{ij} = 0$, akkor az i -edik sorban és j -edik oszlopban álló elemek összege legalább n . Igazoljuk, hogy a táblázat elemeinek összege legalább $\frac{n^2}{2}$.

(25 pont)

4. A p valós paraméter mely értékeire van valós megoldása a

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

egyenletnek x -re nézve? Ekkor mik a megoldások?

(25 pont)