

## MATEMATIKA VERSENYFELADATOK

Zalaegerszeg, 2021. október 22.

1. Keressük meg az összes olyan  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  valós függvényt, mely minden  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén kielégíti az

$$f(x^3) + f(y^3) = (x + y)f(x^2) + f(y^2) - f(xy)$$

egyenletet.

(25 pont)

2. Legyen az  $ABC$  háromszög köréírható körének középpontja  $O$  és magasságpontja  $M$ . Tegyük fel, hogy  $\overline{AO} = \overline{AM}$ . Mennyi ekkor a háromszög  $A$  csúcsánál levő szöge?

(25 pont)

3. Legyen  $S = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \dots + x_{149}x_{150}$ . Megadhatóak az  $x_1, x_2, \dots, x_{150}$  számok úgy, hogy mindegyikük  $\sqrt{2} - 1$  vagy  $\sqrt{2} + 1$ , és  $S$  értéke 121 legyen? És úgy, hogy mindegyikük  $\sqrt{2} - 1$  vagy  $\sqrt{2} + 1$  és  $S$  értéke 111 legyen?

(25 pont)

4. Legyen  $N$  pont megadva a síkon úgy, hogy nincs köztük három egy egyenesre eső pont. Mindegyik pont ki van színezve piros, fehér vagy zöld színnel. Bármely két pontot összekötő szakaszhoz hozzárendelünk egy értéket az alábbi szabály szerint:

- ha a szakasz legalább egyik végpontja piros, akkor a szakasz értéke 0;
- ha a szakasz mindkét végpontja fehér vagy mindkét végpontja zöld, a szakasz értéke 1;
- ha a szakasz egyik végpontja fehér és a másik zöld, a szakasz értéke  $-1$ .

Számítsuk ki a szakaszokhoz rendelt értékek összegének minimumát minden  $N \geq 2$  pozitív egész esetén.

(25 pont)