Matematika versenyfeladatok

Zalaegerszeg, 2018. október 19.

1. Igazoljuk, hogy az
$$x + x^3 - x^4 - x^6 < 1$$
egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll.

(25 pont)

2. Legyen az ABC háromszög AC oldalán a D, és BC oldalán az E pont úgy választva, hogy DE párhuzamos AB-vel (és tőle különbözik), és érinti a háromszög beírható körét. Legyen AB, AC, BC és DE hossza rendre c, b, a, x. Bizonyítsuk be, hogy
$$a + b + c \geq 8x.$$

(25 pont)

3. Legyen $\{a_n : a_n = a_0 + nd, n \in \mathbb{Z}_0^+\}$ egy végtelen, csak pozitív tagú számtani sorozat. Igazoljuk, hogy ha van olyan $a > 1$ egész szám, melynek az $\{a_n\}$ sorozat két különböző pozitív egész kitevőjű hatványát tartalmazza, akkor a sorozat tartalmazza egy $\{b_n : b_n = b_0 q^n, n \in \mathbb{Z}_0^+\}$ végtelen mértani sorozat minden elemét.

(25 pont)

4. Pozitív egész a, b számokra jelölje $a|b$ azt, hogy a osztója b-nek. Határozzuk meg azon p, q prímszámokat, melyekre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:
$$p^2|(q^3 + 1), \quad \text{és} \quad q^2|(p^6 - 1).$$

(25 pont)