Matematika versenyfeladatok

Zalaegerszeg, 2017. október 20.

1. Oldjuk meg az

$$1 + 5 \cdot 2^m = n^2$$

egyenletet, ahol m és n pozitív egészek.

(25 pont)

2. Legyen $ABCD$ egy konvex négyszög, melyre $AB = CD$. Legyen O az AC és BD átlók metszéspontja, és jelölje X, Y, Z és T rendre a BC, AD, AC és BD szakaszok felezőpontját. Igazoljuk, hogy az OZT háromszög köréírható körének középpontja az X, Y pontokon átmenő egyenesen van.

(25 pont)

3. Legyenek x, y, z páronként különböző, nemnegatív valós számok. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \geq \frac{4}{xy+yz+zx}.$$

(25 pont)

4. Tekintsük az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvényt, ahol a, b, c valós számok. Legyen $M = \{f(2k) : k \in \mathbb{Z}\}$ és $N = \{f(2k+1) : k \in \mathbb{Z}\}$. Igazoljuk, hogy $M = N$, vagy a két halmaznak nincs közös eleme.

(25 pont)