MATEMATIKA VERSENYFELADATOK

Zalaegerszeg, 2015. november 13.

1. A páratlan természetes számok sorozatából alkossunk csoportokat a következő módon: az első csoport egyedül az 1 számot tartalmazza; a második a következő kettőt (3 és 5); a harmadik a következő hármat (7; 9 és 11); és így tovább. Bizonyítsa be, hogy valamennyi csoportban a benne szereplő számok összege a csoport sorszámának a köbével egyenlő. (Pl. a harmadik csoportban $7 + 9 + 11 = 3^3$).

(22 pont)

2. Két természetes számmal a következő műveleteket végeztük el: összeadtuk, a nagyobból kivontuk a kisebbet, összeszoroztuk, a nagyobbat elosztottuk a kisebbel. A kapott eredményeket összeadtuk és 243-at kaptunk.
Határozza meg, hogy mely természetes számokkal végeztük a műveleteket!

(26 pont)

3. Jelölje az ABC háromszög súlypontját S, két súlyvonalát AA_1 és BB_1. Bizonyítsa be, hogy ha SA_1CB_1 négyszög érintőnégyszög, akkor az ABC háromszög egyenlőszárú.

(26 pont)

4. Bizonyítsa be, hogy nincsenek olyan a,b,c,d,x egészek, melyekre

$$x^2+a^2=(x+1)^2+b^2=(x+2)^2+c^2=(x+3)^2+d^2$$

(26 pont)

Útmutató a feladatok megoldásához

1. feladat

Az első k ($k \in N^+$) csoportban lévő páratlan számok száma $1+2+3+....+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

Tehát a k+1-edik csoportban lévő első (legkisebb) páratlan szám $2\left[\dfrac{k(k+1)}{2}+1\right]-1=k^2+k+1$.

Így a k+1-edik csoportban lévő k+1 páratlan szám összege a számtani sorozat ismert összegképlete alapján:

$$\frac{1}{2}\left[(k^2+k+1)+(k^2+k+1+2k)\right](k+1)=(k+1)^3$$

amit bizonyítani kellett.

2. feladat

Legyen a két természetes szám x és y, $x \geq y$.

Ekkor:

$$(x+y)+(x-y)+xy+\frac{x}{y}=243$$

$$2x+xy+\frac{x}{y}=243$$

$$2xy+xy^2+x=243y$$

$$x(y^2+2y+1)=243y$$

$$x=\frac{243y}{(y+1)^2}$$

Mivel y és $(y+1)^2$ relatív prímek, ezért $(y+1)^2 / 243$

Mivel $243=3\cdot 9^2=27\cdot 3^2=243\cdot 1^2$, ezért

$(y+1)^2=81$ vagy 9. $(y+1)^2 \neq 1$ mert $y \neq 0$.

Így $x=\dfrac{243\cdot 8}{81}=24$ ill. $x=\dfrac{243\cdot 2}{9}=54$.

Így a feladatnak két megoldása van:

$x=24$, $y=8$ ill. $x=54$ $y=2$.

3. feladat

Legyen a szokásos jelölésekkel: $a = CB$, $b = CA$, $s_a = AA_1$ és $s_b = BB_1$ Ismert, hogy $SA_1 = \frac{s_a}{3}$, $SB_1 = \frac{s_b}{3}$ Mivel SA_1CB_1 érintőnégyszög, ezért $SB_1 + A_1C = SA_1 + CB_1$

azaz $\frac{s_a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{s_b}{3} + \frac{a}{2}$.

Másrészt az AA_1C és BB_1C háromszögek területei egyenlők (az ABC háromszög területének felével), és a beírt körük azonos (érintőnégyszögbe írt kör) ezért kerületük is egyenlő, így

$$s_a + \frac{a}{2} + b = s_b + \frac{b}{2} + a$$

Ebből a fenti egyenlet háromszorosát kivonva a = b-t kapjuk, tehát a háromszög valóban egyenlő - szárú.

4. feladat

Négy szomszédos egész szám négyzetének nyolcas maradéka valamilyen sorrendben 0,1,0,4 lesz. A 0-hoz hozzáadva egy másik négyzetszám maradékát 0,1,4 valamelyikét kapjuk.

1-hez adva 1,2,5 valamelyikét, 4-hez adva 0,5,4 valamelyikét kaphatjuk. Mivel e három számhármasnak nincs közös eleme, ezért valóban nem létezhetnek olyan a,b,c,d,x egész számok, melyre a felírt egyenlőségek teljesülnének.