MATEMATIKA VERSENYFELADATOK

Zalaegerszeg, 2013. október 25.

1. Az ABC háromszög egy körbe van írva. Legyen A_1 A átellenes pontja a körben, A_0 a BC oldal felezőpontja, A_2 pedig A_1 A_0-ra vonatkozó tükörképe. Hasonlóan definiáljuk a B_2 és C_2 pontokat is, kiindulva a B és a C pontból.
Bizonyítsa be, hogy az A_2, B_2, C_2 pontok egybeesnek!

(22 pont)

2. Határozza meg azt a pozitív egész számot, melynek pontosan 4 pozitív egész osztója van, és az osztók összege 108.

(25 pont)

3. Bizonyítsa be, hogy ha tíz egymás után következő pozitív egész szám szorzata egyenlő egy pozitív egész szám k- adik hatványával (k pozitív egész), akkor a tíz szám között kell olyannak is lenni, amely maga is egy pozitív egész szám k- adik hatványa.

(25 pont)

4. Az a_1, a_2, ..., a_n valós számokra teljesül, hogy minden i-re $2 \le a_i \le 3$ és $n \ge 3$.
Bizonyítsa be, hogy ha $a_1+a_2+\ldots+a_n=p$ akkor

$$\frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2}{a_1+a_2-a_3}+\frac{a_2^2+a_3^2-a_4^2}{a_2+a_3-a_4}+\ldots+\frac{a_n^2+a_1^2-a_2^2}{a_n+a_1-a_2}\le 2p-2n$$

(28 pont)