MATEMATIKA VERSENYFELADATOK
Zalaegerszeg, 2008. október 17.

1. A $[0;12]$ intervallumban lévő x, y valós számokra:
$$xy=(12-x)^2(12-y)^2.$$

Határozza meg az xy szorzat legnagyobb értékét!

(25 pont)

2. Bizonyítsa be, hogy nincs olyan pozitív egész számokból álló x, y, u, v számnégyes, melyre
$$x^2+y^2=3(u^2+v^2).$$

(25 pont)

3. A k_1 és k_2 körök metszéspontja A és B, továbbá C a k_1 kör egy A-tól és B-től különböző olyan tetszőleges pontja, mely a k_2 körön kívül helyezkedik el. Jelöljük a CA egyenes k_2–vel való metszéspontját D–vel, ahol $D \neq A$.
Legyen M és N rendre az A pontot nem tartalmazó BC és BD körívek felezőpontja, K pedig a CD szakasz felezőpontja. Bizonyítsa be, hogy az $MKN\angle = 90^o$.

(25 pont)

4. Bizonyítsa be, hogy a tetszőlegesen választott $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$ pozitív számokra fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_k^2+b_k^2} \geq \sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_k)^2}.$$

Mikor áll fenn az egyenlőség?

(25 pont)