

Izsák Imre Gyula komplex természettudományi verseny – 2005

Matematika feladatsor

1. Tudjuk, hogy az O középpontú körbe írt $ABCD$ húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra. Bizonyítsa be, hogy az $AOCD$ és a $BODC$ négyszögek területe egyenlő!
(25 pont)
2. Egy bajnokságon 60 tanuló vesz részt. Tudjuk, hogy a közülük kiválasztott bármely 10 tanuló között van legalább három olyan, aki ugyanabból az iskolából jött. Bizonyítsa be, hogy ekkor a résztvevők között van legalább 15 olyan tanuló, aki ugyanabból az iskolából érkezett!
(25 pont)
3. Bizonyítsa be, hogy bármely 18 darab egymás után következő háromjegyű szám között mindig van legalább egy olyan, amely osztható a számjegyek összegével!
(25 pont)
4. Tudjuk, hogy az

$$x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$$

egyenletnek van legalább egy valós gyöke. Bizonyítsa be, hogy ekkor:

$$a^2 + b^2 \geq 8$$

(25 pont)