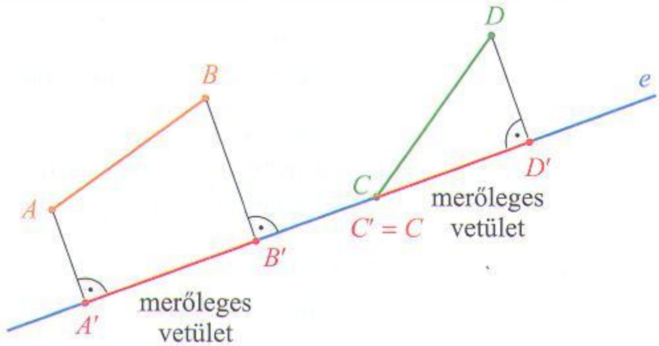
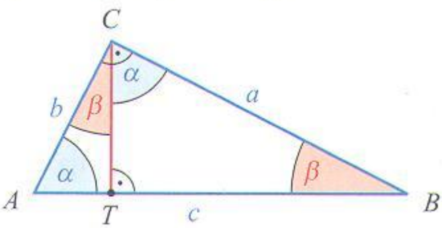
A hasonlóság alkalmazásai: magasság- és befogótétel

A következőkben szüségünk lesz a mértani közép definíciójára. Ezzel bővebben a *Nevezetes közepek* című fejezetben foglalkozunk majd.

DEFINÍCIÓ: Két pozitív szám **mértani közepé**nek a két szám szorzatának négyzetgyökét nevezzük. ($G = \sqrt{ab}$, ahol a, $b > 0$.)

Emlékeztető: Egy szakasz adott egyenesre eső merőleges vetületén a szakasz végpontjaiból az egyenesre állított merőleges talppontok által meghatározott szakaszt értjük. Ha a szakasz egyik végpontja az egyenesre illeszkedik, akkor ennek a pontnak a képe önmaga.

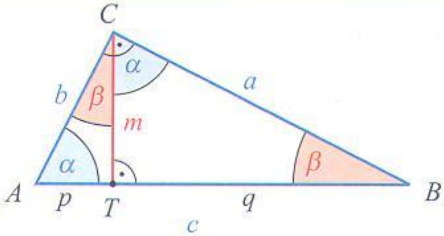




A derékszögű háromszög hegyesszögeinek összege 90°. Ha a hegyesszögeket α és β jelöli, akkor ez azt jelenti, hogy az α-t a β, a β-t pedig az α egészíti ki 90°-ra. Húzzuk meg az ABC derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasságot, talppontját jelölje T! Az ACT derékszögű háromszögben az α hegyesszöget az $ACT\sphericalangle$ egészíti ki 90°-ra, ezért $ACT\sphericalangle = \beta$, hasonlóképp $TCB\sphericalangle = \alpha$.

Az átfogóhoz tartozó magasság tehát a háromszöget két olyan derékszögű háromszögre osztja, amelyek mindegyikének szögei az eredeti derékszögű háromszög szögeivel egyenlők.

TÉTEL: Magasságtétel: Derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság hossza mértani közepe azon két szakasz hosszának, amelyre az átfogóhoz tartozó magasság talppontja az átfogót osztja.



Bizonyítás: Használjuk az ábra jelöléseit! Az előzőekben igazoltuk, hogy az $ATC\triangle$ és a $CTB\triangle$ szögei megegyeznek, ezért a két háromszög hasonló ($ATC\triangle \sim CTB\triangle$). A hasonlóságból következik, hogy megfelelő oldalaik aránya egyenlő:

$$\frac{CT}{AT} = \frac{BT}{CT}, \text{ azaz } \frac{m}{p} = \frac{q}{m}, \text{ amelyből átszorzással kapjuk: } m^2 = pq \Rightarrow m = \sqrt{pq}.$$

TÉTEL: Befogótétel: Derékszögű háromszögben a befogó hossza mértani közepe az átfogó hosszának és a befogó átfogóra eső merőleges vetülete hosszának.

Bizonyítás: Használjuk az előző ábra jelöléseit! Az $ATC\triangle$ és az $ACB\triangle$ szögei megegyeznek, ezért a két háromszög hasonló ($ATC\triangle \sim ACB\triangle$), így megfelelő oldalaik aránya egyenlő:

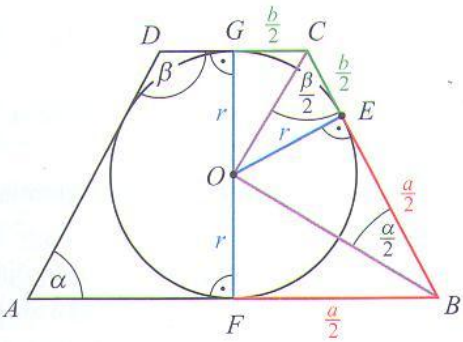
$\frac{AC}{AT} = \frac{AB}{AC}$, azaz $\frac{b}{p} = \frac{c}{b}$, amelyből átszorzással kapjuk: $b^2 = cp \Rightarrow b = \sqrt{cp}$.

Hasonlóan kapjuk a háromszög másik befogójára, hogy $a^2 = cq$.

Megjegyzés: A két befogótétellel az alábbi módon bizonyítható a Pitagorasz-tétel: $a^2 + b^2 = cp + cq = c \cdot (p + q) = c \cdot c = c^2$.

1. példa

Egy egyenlő szárú érintőtrapéz párhuzamos oldalainak hossza a és b. Határozzuk meg a trapéz területét!



Megoldás

A megoldáshoz készítsünk ábrát! Ha a trapézba kör írható, akkor a kör középpontja a trapéz szögfelezőinek metszéspontja. Ezért $OBC\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$ és $OCB\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$. Mivel a trapéz egyik szárán lévő szögek összege $180°$, ezért $\alpha + \beta = 180°$, tehát $\frac{\alpha + \beta}{2} = 90°$, az OBC háromszög derékszögű, derékszöge az O csúcsnál van.

Tudjuk, hogy az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, ezért az OE sugár merőleges BC-re, így $OE = r$ az $OBC\triangle$ átfogóhoz tartozó magassága.

Tudjuk továbbá, hogy a körhöz külső pontból húzott érintők egyenlő hosszúak, így

$$FB = BE = \frac{a}{2} \quad \text{és} \quad GC = CE = \frac{b}{2}.$$

Írjuk fel az OBC derékszögű háromszögben a magasságtételt!

Eszerint $OE = \sqrt{CE \cdot BE} = \sqrt{\frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{ab}}{2}$, tehát $r = \frac{\sqrt{ab}}{2}$.

A trapéz magassága $2r$-rel egyenlő, így a területe:

$$T = \frac{(a+b)m}{2} = \frac{(a+b)2r}{2} = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}.$$