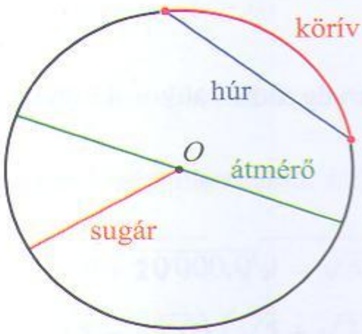
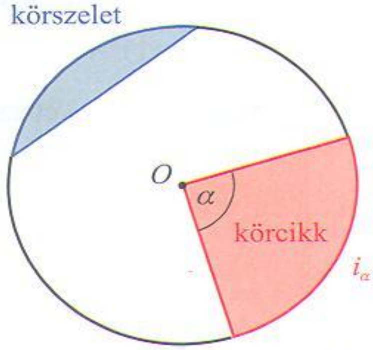
Körrel kapcsolatos fogalmak

Kerületi és középponti szögek

Kilencedik évfolyamon *A kör és részei* című fejezetben definiáltuk a kört és a körrel kapcsolatos fogalmakat: középpont, sugár, húr, átmérő, körív, középponti szög, szelő, érintő, ívmérték. Megadtuk a kör kerületének, területének, valamint a körcikk és a körszelet területének kiszámítási módját.

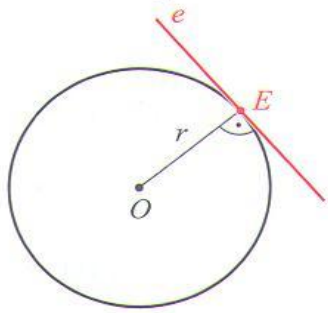




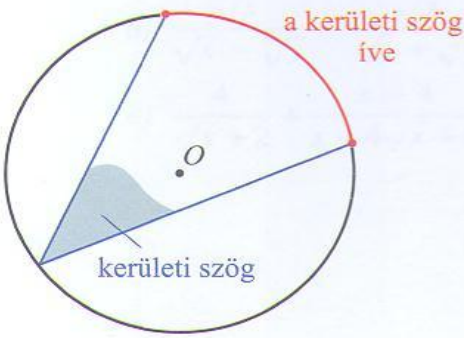
$K_{kör} = 2 \cdot r\pi$ $\quad T_{kör} = r^2 \cdot \pi$ $\quad i_\alpha = \alpha \cdot r$ $\quad t_\alpha = \dfrac{i_\alpha \cdot r}{2}$

Kimondtuk és bizonyítottuk a kör érintőjére vonatkozó tételt: a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.

Ebben a fejezetben tovább bővítjük a körrel kapcsolatos ismereteinket.



DEFINÍCIÓ: A kör egy pontjából induló két húr által bezárt szöget **kerületi szög**nek nevezzük.



A kerületi szög csúcsa tehát a kör kerületén helyezkedik el, két szára pedig ebből a csúcsból kiinduló egy-egy húrja a körnek. A definícióból következik, hogy a kerületi szög minden esetben kisebb 180°-nál. Azt a körívet, amelyet a kerületi szög szárai a körvonalból kimetszenek, a kerületi szöghöz tartozó ívnek nevezzük és fordítva, a kerületi szöget az ívhez tartozó, vagy az íven nyugvó kerületi szögnek mondjuk.

DEFINÍCIÓ: A kör ugyanazon pontjából induló húr és érintő félegyenes által bezárt szöget **érintő szárú kerületi szögnek** nevezzük.

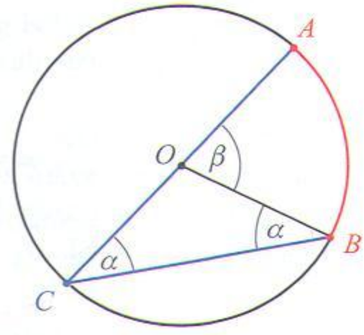
Azt a körívet, amely az érintő szárú kerületi szög tartományába esik, az érintő szárú kerületi szöghöz tartozó ívnek nevezzük.

Általában kerületi szög alatt mindkét fajta szöget szokás érteni: a húrok által meghatározott kerületi szöget és az érintő szárú kerületi szöget is. Az elkövetkezőkben mi sem fogjuk megkülönböztetni őket.

TÉTEL: Kerületi és középponti szögek tétele: Adott körben adott ívhez tartozó kerületi szög egyenlő az ugyanazon íven nyugvó középponti szög felével.

Bizonyítás: Jelölje az ív két végpontját A és B, a kör középpontját O, a kerületi szög csúcsát C, továbbá az AOB középponti szöget β, az ACB kerületi szöget pedig α! A jelöléseket használva tehát azt kell bizonyítanunk, hogy $\beta = 2 \cdot \alpha$.

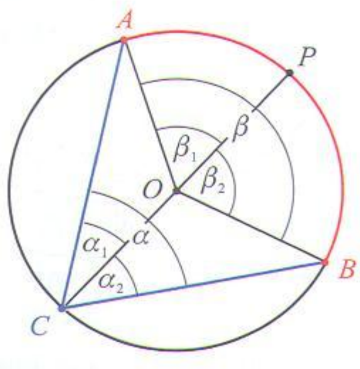
1. eset: Az α kerületi szög egyik szára (AC) a kör átmérője, másik szára (BC) a kör húrja. (Más megfogalmazásban: a kör középpontja a kerületi szög egyik szárára illeszkedik.)



Az $OBC\triangle$ egyenlő szárú, mert az OC és az OB is a kör sugarával egyenlő. Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlők, ezért az $OBC\sphericalangle = \alpha$. Az OBC háromszögnek a β külső szöge, ezért $\beta = 2 \cdot \alpha$.

A következő két esetet az első esetre vezetjük vissza.

2. eset: A kör középpontja az α kerületi szög tartományában van.



Húzzuk meg a körnek a C-re illeszkedő átmérőjét, ennek a C-től különböző végpontját jelölje P! Használjuk az ábra jelöléseit!

Ekkor az ACP és PCB kerületi szögek az 1. esetnek megfelelő helyzetűek, ezért:

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= 2 \cdot \alpha_1 \\ \beta_2 &= 2 \cdot \alpha_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \beta = \beta_1 + \beta_2 = 2 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2 =$$

$$= 2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) = 2 \cdot \alpha$$